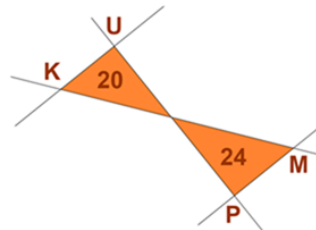


# Poučevanje racionalnih števil z razumevanjem

dr. Vida Manfreda Kolar in dr. Adrijana Mastnak  
Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta

Laško, 11. in 12. november 2024

6. konferenca o učenju  
in poučevanju matematike  
KUPM 2024



ZRSŠ  
ZAVOD  
REPUBLIKE SLOVENIJE  
ZA ŠOLSTVO



REPUBLIKA SLOVENIJA  
MINISTRSTVO ZA VZGOJO IN IZOBRAŽEVANJE

I FEEL  
SLOVENIA



Sofinancira  
Evropska unija

# Opredelitev pojmov: del celote, ulomek, racionalno število

1. Ali del celote pomeni isto kot ulomek?
2. Ali ulomek pomeni isto kot racionalno število?
3. Ali vsako racionalno število lahko zapišemo v obliki ulomka?
4. Ali je vsako število, ki je zapisano obliki ulomka, tudi racionalno število?
5. Kako zapišemo ulomek?
6. Kako zapišemo racionalno število?

# Različni pomeni zapisa $\frac{a}{b}$

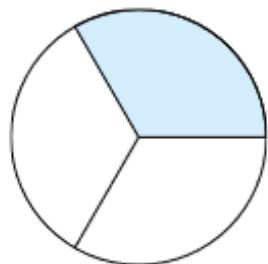
- Zapis števila s številko
- Racionalno število
- Zapis računske operacije deljenja
- Zapis razmerja

# Različni pomeni ulomkov

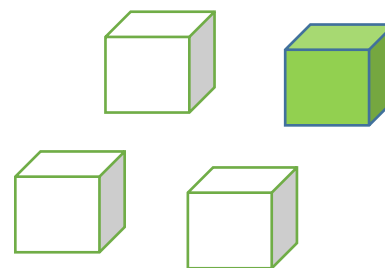
1. Ulomek kot del celote
2. Ulomek kot kvocient (deljenje)
3. Ulomek kot operator
4. Ulomek kot merjenje (število)
5. Ulomek kot razmerje

# 1. Ulomek kot del celote

Celota je enota (ploskovna, dolžinska)



Celota je množica (diskretno ločeni objekti)

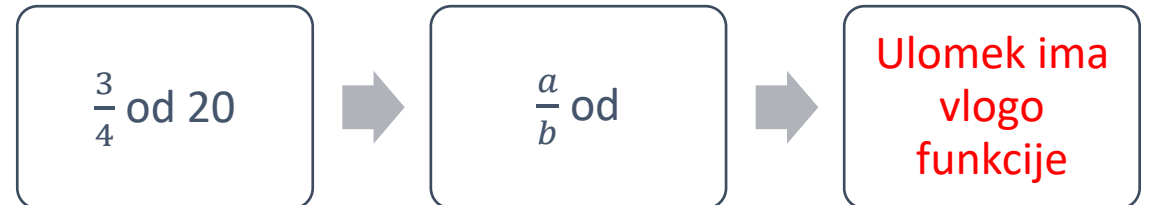


## 2. Ulomek kot kvocient

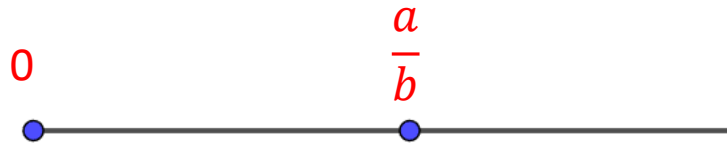
3 čokolade razdelimo med 8 ljudi.  
Koliko dobi vsak?

$$3 : 8 = \frac{3}{8}$$

## 3. Ulomek kot operator



#### 4. Ulomek kot merjenje (število)



Ulomek meri razdaljo nekaterih točk od števila nič.

#### 5. Ulomek kot razmerje

1. Primerjava raznovrstnih količin
2. Primerjava istovrstnih količin:
  - del: celota
  - del: del

# Razlogi za zahtevnost obravnave ulomkov

1. Različni pomeni zapisa  $\frac{a}{b}$
2. Različni pomeni ulomka
3. Sprememba načina razmišljanja o količinah (od aditivnega k multiplikativnemu)
4. Drugačna vloga enote (od fiksne k spreminjajoči)
5. Raznovrstnost reprezentacij



# Sprememba načina razmišljanja o količinah

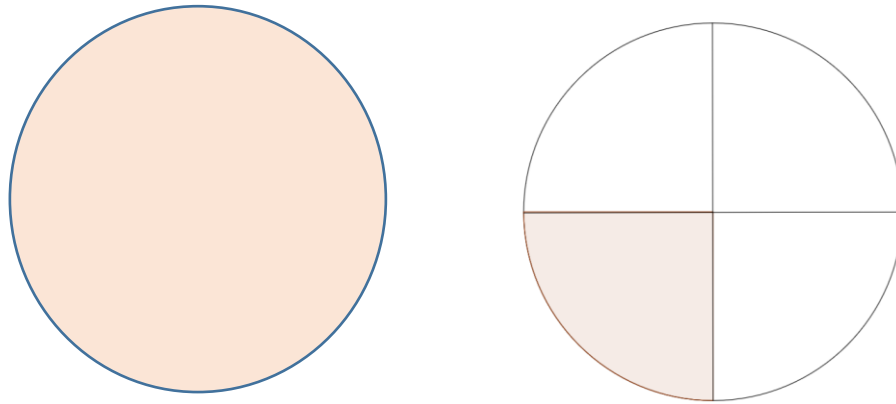
Analiza primera:

Cvetlici, visoki 8 cm in 12 cm, so vsadili v dva cvetlična lončka. Po dveh tednih je bila prva cvetlica visoka 10 cm, druga pa 15 cm. Katera cvetlica je rasla hitreje?



# Spremenjena vloga enote

Analiza primera: Jan je naročil 2 pici. Kolikšen del naročene pice je pojedel (obarvan del na sliki)?

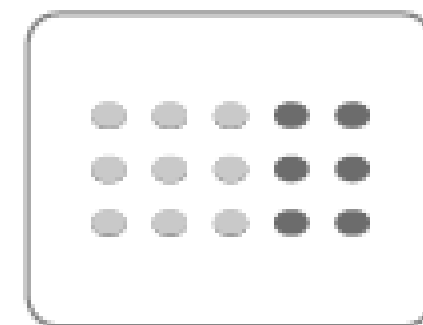
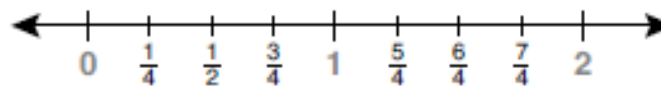
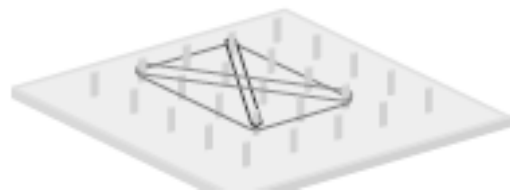


# Raznovrstnost reprezentacij

Ploskovni model

Dolžinski model

Model množice



# Poučevanje racionalnih števil z razumevanjem

Kaj to pomeni?



Premik od proceduralnega h  
konceptualnemu znanju

Kako to doseči?

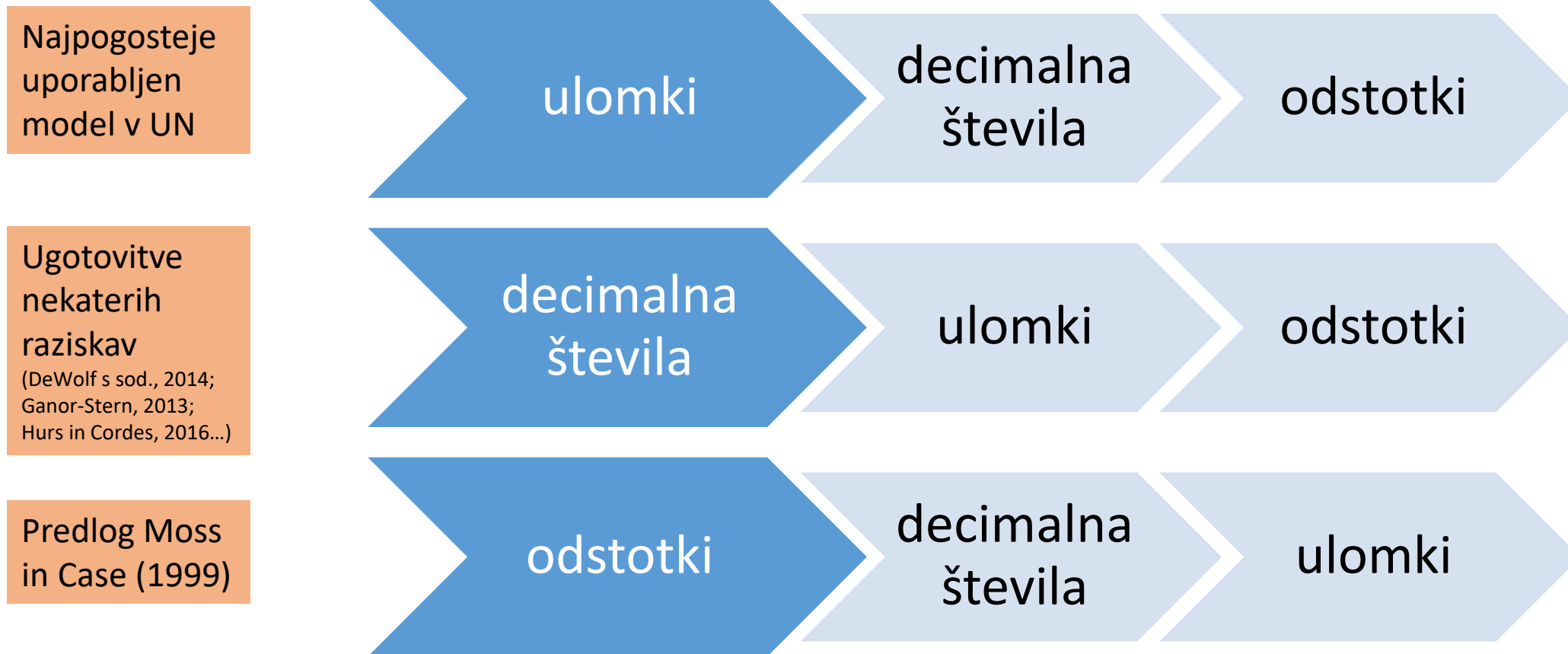


Povezovanje med različnimi vidiki istega koncepta

Spremenjena/povečana vloga modelov pri  
razvijanju konceptov in postopkov

# Povezovanje med različnimi vidiki istega koncepta

- Tian in Siegler (2017): vrstni red poučevanja - ni enoznačnega odgovora



# Bolj kot vrstni red obravnave je pomembno, da....

- učenci spoznajo, da so različni zapisi racionalnega števila del istega sistema števil, ki so predstavljena na različne načine.
  - učenci razvijejo razumevanje racionalnih števil in ne le spretnosti izvajanja postopkov računanja.
- Potrebno upoštevati, kako se nek mat. koncept gradi (kdaj postane zahtevnejši in kako).
  - Učenje z razumevanjem ob modelih (in ne prehitro učenje izvajanja postopkov računanja po znanih algoritmih).
  - Obravnavanje odnosa med različnimi zapisi nenegativnih racionalnih števil.
  - Pomembno zavedanje, kaj učencem povzroča težave in kako jih premostiti.
  - Poznavanje prednosti in slabosti posameznih modelov.

# Osnutek učnega načrta za matematiko

RAZRED	1.-3.r	4.r	5.r	6.r	7.r	8.r
ULOMEK	delitev celote	operator	merski kontekst - število		deljenje	razmerje
RAZVIJANJE RAZUMEVANJA	ploskovni in dolžinski model množice (3.r)	ploskovni in dolžinski model množice	ploskovni in dolžinski model ( <b>številski poltrak</b> )	ploskovni in dolžinski model (številski poltrak)	ploskovni in dolžinski model (številski poltrak)	<b>številska premica</b>
VZPOSTAVLJANJE POVEZAV MED ZAPISI RACIONALNIH ŠTEVIL			ulomek, <b>decimalna številka</b>	ulomek, decimalna številka in <b>odstotki</b>	ulomek, decimalna številka in odstotki	<b>množica racionalnih števil</b>

Ob modelih zapiše desetiški ulomek z decimalno številko in obratno.

Ob modelih prepozna enakovrednost zapisov števila z ulomkom in decimalno številko za desetino, petino, četrtno, polovico, tri četrtine.

Z uporabo modelov prehaja med različnimi zapisi nenegativnega racionalnega števila.

Pozna enakovrednost zapisov nenegativnih rac. št. za desetino, petino, četrtno, polovico, tri četrtine in celoto.



# Poglobljanje konceptualnega znanja: ekv. ulomek

Ploskovni model	Dolžinski model	Množica
Dodajanje črt: vertikalno in horizontalno	Dodajanje črt: vertikalno	Dodajanje novih identičnih vrstic („kloniranje“)

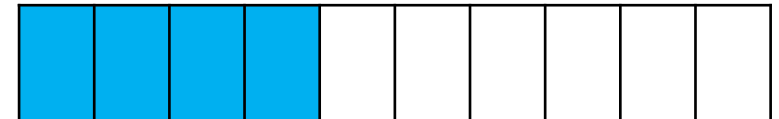
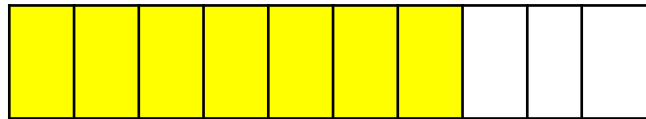




# Poglobljanje konceptualnega znanja – seštevanje ulomkov

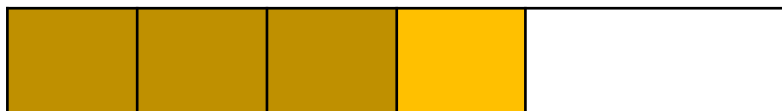
Premislek o izboru modela:

- Kateri je bolj vsestransko uporaben?
- Kateri omogoča izpeljavo pravila?

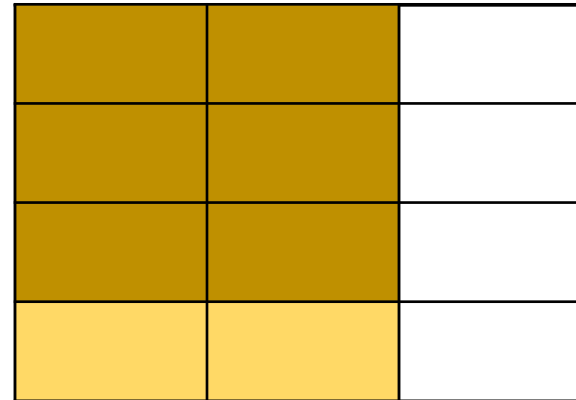


# Poglobljanje konceptualnega znanja – množenje ulomkov

$$\frac{3}{4} \text{ od } \frac{2}{3}$$



$$\frac{3}{4} \text{ od } \frac{2}{3}$$



# Raziskave v slovenskem učnem prostoru

- Raziskava med petošolci (Hodnik, Manfreda Kolar, 2018)
- Raziskava med osmošolci (Manfreda Kolar, Janežič, Hodnik, 2015)
- Raziskava med študenti razrednega pouka (Manfreda Kolar, Vula, Hodnik, 2018)

# Primer iz raziskave med petošolci

1. Which shape is divided into quarters? Mark YES or No. In cases you mark with YES, color one quarter.

YES NO YES NO YES NO YES NO

YES NO YES NO YES NO

## Rezultati:

- Le 1 od 89 učencev je popolnoma pravilno rešil nalogo.
- Najpogostejša napaka: učenec označi le primere, k oje celota razdeljena na skladne dele (83,1 %)

# Primer iz raziskave med osmošolci

Narisan pravokotnik predstavlja  $\frac{3}{4}$  celote:



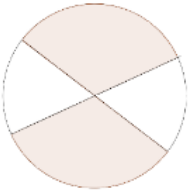

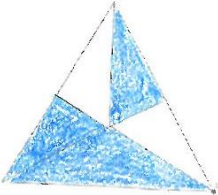
Nariši  $1 \frac{1}{4}$  celote.

Najpogostejša napaka:

neustrezna delitev pravokotnika -  
delitev na 4 namesto na 3 enake  
dele (18 % osmošolcev):

# Primer iz raziskave med študenti RP

V katerem trikotniku sta pobarvani  $\frac{2}{3}$  lika?

		
70 %	59 %	67 %

# Literatura

- Van de Walle, Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2013). Elementary and Middle school mathematics. Pearson.
- Hodnik, T., Manfreda Kolar, V. (2018). How fifth-grade pupils reason about fractions : a reliance on part-whole subconstructs. *Educational Studies in Mathematics*, 99, 335-357.
- Steffe, L. P. (2002). A new hypothesis concerning children's fractional knowledge. *Journal for Mathematical Behaviour* 20, 267-307..
- Hackenberg, A. (2007). Units coordination and construction of improper fractions: A revision of the splitting hypothesis. *Journal of Mathematical Behaviour*, 26 (1), 27-47.
- Lamon, S. (2020). Teaching fractions and ratios for understanding. Routledge.
- Manfreda Kolar, V., Vula, E., Hodnik, T. (2018). Primary teacher students' understanding of fraction representational knowledge in Slovenia and Kosovo. *CEPS journal : Center for Educational Policy Studies Journal*, 8(2),71-96.
- Manfreda Kolar, V., Janežič, A., Hodnik, T. (2015). Diagnosing students' difficulties in understanding the concept of fraction. V: NOVOTNÁ, Jarmila (ur.), MORAOVÁ, Hana (ur.), NOVOTNÁ, Jarmila (ur.). *Developing mathematical language and reasoning : proceedings*. Prague: Charles University, Faculty of Education, 2015, 232-240.
- Tian, J., & Siegler, R.S. (2017). Which Type of Rational Numbers Should Students Learn First? *Educational Psychology Review*, 30, 351-372.