

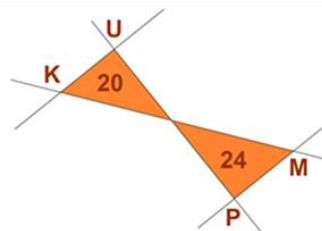
NOVI IZZIVI IN NOVOSTI PRI POUČEVANJU FUNKCIJ V NOVEM UČNEM NAČRTU

Prof. dr. Tatjana Hodnik

Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta

Laško, 11. in 12. november 2024

6. konferenca o učenju
in poučevanju matematike
KUPM 2024



ZRSŠ
ZAVOD
REPUBLIKE SLOVENIJE
ZA ŠOLSTVO



REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA VZGOJO IN IZOBRAŽEVANJE



Sofinancira
Evropska unija

Zahvala

Za konstruktivno sodelovanje pri oblikovanju tem funkcija in algebra, ki se bo gotovo še nadaljevalo, se iskreno zahvaljujem učiteljicam ge. Andrejki Kramar, ge. Nataliji Podjavoršek, ge. Poloni Mlinar Biček in vodji skupine ge. Mojci Suban.

Kar bom predstavila v nadaljevanju pri predlogu novega učnega načrta, je plod našega skupnega strokovnega dela.

Napoved vsebine

Opredelitev skupine ciljev ‚funkcija‘ v predlogu novega učnega načrta za matematiko

Primerjava ‚nov- star‘ UN za funkcijo: tema, sklopi, skupina ciljev, cilji, standardi

Izziv s poučevanjem funkcije v praksi: predstavitev in kratka refleksija

Opredelitev skupine ciljev ‚funkcija‘ v predlogu novega učnega načrta

Funkcija je eden od temeljnih matematičnih pojmov, ki se postopno izgrajuje skozi celotno osnovno šolo in sicer kot zaporedja, formule za računanje veličin, algebrski izrazi ipd., sistematično pa se kot samostojna tema razvija pri učencih v 3. VIO.

Pričnemo s pojmom predpis, s katerim pri učencih ozavestimo pomen medsebojnega odnosa dveh spremenljivk in postopoma izgrajujemo pri učencih razumevanje funkcijskega predpisa. Pri tem uporabljamo različne reprezentacije raznolikih funkcij, vzetih iz matematičnega in življenjskega konteksta, ki učencem pomagajo razumeti njihovo uporabnost in pomen.

Poudarek je na obravnavi raznolikih funkcij, ki učencem omogočajo, da bolje razumejo svet okoli sebe, ga opišejo z matematičnim jezikom in orodji ter rešujejo matematične in kontekstualne probleme.

Pojem funkcija predstavlja temelj za nadaljnje matematično izobraževanje, saj se funkcije pojavljajo na številnih matematičnih (geometriji, statistiki idr.) in drugih področjih človekovega delovanja (fizika idr.).

Funkcije so v osnovni šoli povezane tudi z drugimi matematičnimi pojmi, kot so koordinatni sistem, premo in obratno sorazmerje, linearna enačba in ob tem osmislijo in podprejo njihovo obravnavo.

Učenci s pomočjo digitalne tehnologije preiskujejo raznolike funkcije, odkrivajo njihove lastnosti, opazujejo grafe funkcije in prehajajo med reprezentacijami (npr. preglednica, graf, simbolni zapis).

Primerjava ,nov- star' UN za funkcijo: tema, sklopi, skupina ciljev, cilji, standardi

<p>Učni načrt za matematiko iz leta 2011 (2.VIO)</p>	<p>UN v nastajanju 2024 2. VIO</p>
<p>Tema: aritmetika in algebra Sklop: povezanost količin</p> <p>Standardi znanja: razvijajo številske predstave in spoznavajo odnose med števili v množici naravnih in racionalnih števil; uporabljajo računske zakone</p>	<p>Tema: algebra Skupina ciljev: algebrski izrazi (druga skupina ciljev znotraj te teme je ‚enačbe in neenačbe‘) Cilji: <u>spoznava in uporablja pojem spremenljivka v različnih kontekstih</u> preiskuje slikovne vzorce in številska zaporedja z naravnimi števili razvija možnost posploševanja slikovnih vzorcev in številskih zaporedij na n-ti korak <u>razvija možnost sklepnega računanja</u></p>

Podčrtani so standardi, ki se navezujejo na funkcijo (za namen predstavitve razlik).

UN 2011

UN 2024

Podčrtani so standardi, ki se navezujejo na funkcijo
(za namen predstavitve razlik).

4. - izpolnijo tabele;
- sklepajo iz enote na množino in obratno;

**opiše pravilo pri rastočem slikovnem vzorcu
sklepa z enote na množino in obratno**

5. - rešijo naloge s sklepanjem iz enote na množino in obratno,
- sklepajo iz množine na množino,
- s sklepnim računom zapišejo situacije iz vsakdanjega življenja;

uporablja črko za zapis spremenljivke
s sklepanjem napove število elementov v naslednjih nekaj korakih (do 10) slikovnega vzorca ali številskega zaporedja
opiše pravilo za naslednji člen pri rastočem slikovnem vzorcu
sklepa z množine na množino

6. - rešijo naloge s sklepanjem iz enote na množino in obratno,
- sklepajo iz množine na množino,
- uporabijo sklepni račun pri reševanju besedilnih nalog,
- delijo količine v razmerju.

izračuna vrednost algebrskega izraza za izbrane vrednosti spremenljivke
oblikuje algebrski izraz za število elementov v n-tem koraku slikovnega vzorca oz. številskega zaporedja
s sklepanjem napove število elementov slikovnega vzorca ali številskega zaporedja v naslednjih nekaj korakih (do 10)

<p>Učni načrt za matematiko iz leta 2011 3.VIO</p>	<p>UN v nastajanju 2024 3.VIO</p>
<p>TEMA: aritmetika in algebra Sklop: odstotni (procentni) račun ter premo in obratno sorazmerje</p> <p>Standardi znanja: usvojijo številske predstave in računske operacije v množici realnih števil, spoznajo odnose med številskimi množicami, <u>usvojijo osnove linearne funkcije,</u> formalno (z uporabo pravil) rešujejo linearne enačbe, uporabljajo odstotni (procentni) račun, <u>premo in obratno sorazmerje v problemskih situacijah,</u> usvojijo temeljno znanje o algebrskih izrazih.</p>	<p>TEMA FUNKCIJA Skupina ciljev: funkcija</p> <p>Cilji: spoznava in razvija razumevanje pojma funkcije, spoznava premo in obratno sorazmerje oblikuje matematične modele za situacije premega in obratnega sorazmerja riše grafe funkcij (tudi z uporabo digitalne tehnologije) in prepozna presečišča grafov funkcij, preiskuje lastnosti funkcij (tudi z uporabo digitalne tehnologije)</p>

3. VIO, UN 2011 (odstotni, premo, obratno sorazmerje)

7.

8. -prepoznajo in opredelijo premo in obratno sorazmerje,
-s sklepanjem rešijo besedilne naloge o premem in obratnem sorazmerju,
-narišejo graf premega in obratnega sorazmerja (tabela),
-poznajo povezavo med odstotnim (procentnim) računom in premim sorazmerjem ter rešijo naloge z odstotki (določanje celote, odstotka in deleža);

9. - opredelijo in zapišejo razmerje dveh količin,
- poenostavijo razmerje,
- opredelijo in zapišejo sorazmerje,
- izračunajo neznani člen sorazmerja,
- rešijo naloge premega in obratnega sorazmerja s pomočjo sorazmerij.

<p>Učni načrt za matematiko iz leta 2011 3. VIO</p>	<p>UN v nastajanju 2024 3. VIO</p>
<p>TEMA: aritmetika in algebra</p> <p>Sklop: funkcija</p> <p>Standardi znanja:</p> <p>usvojijo številske predstave in računske operacije v množici realnih števil, spoznajo odnose med številskimi množicami,</p> <p>usvojijo osnove linearne funkcije, formalno (z uporabo pravil) rešujejo linearne enačbe, uporabljajo odstotni (procentni) račun, premo in obratno sorazmerje v problemskih situacijah, usvojijo temeljno znanje o algebrskih izrazih.</p>	<p>TEMA: funkcija</p> <p>Skupina ciljev: funkcija</p> <p>Cilji:</p> <p>spoznava in razvija razumevanje pojma funkcije, spoznava premo in obratno sorazmerje oblikuje matematične modele za situacije premega in obratnega sorazmerja riše grafe funkcij (tudi z uporabo digitalne tehnologije) in prepozna presečišča grafov funkcij, preiskuje lastnosti funkcij (tudi z uporabo digitalne tehnologije)</p>

- 7.
- upodobijo urejen par ali odčitajo koordinate dane točke v koordinatni mreži,
 - prikažejo medsebojno odvisnost dveh spremenljivk s preglednico (tabelo) in odvisnost interpretirajo,
 - grafično prikažejo medsebojno odvisnost dveh spremenljivk in interpretirajo grafični prikaz,
 - ob besedilni nalogi sestavijo preglednico in narišejo graf,
 - prepoznajo odvisnost dveh diskretnih spremenljivk, kjer naraščanje ene spremenljivke pomeni naraščanje/padanje druge;

uporablja koordinatni sistem za predstavitev točk in obratno (koordinati dane točke v koordinatnem sistemu zapiše kot urejen par števil)

razlikuje in uporablja pojma neodvisna, odvisna spremenljivka

pozna pojem funkcije kot predpis (besedni in simbolni npr. $f(x)$, $o(a)$)

iz grafa ugotovi, ali dana točka leži na grafu funkcije

8. upodobijo točko z dano koordinato na realni osi,
 -uporabljajo izraze: koordinatni sistem, koordinatni osi (abscisa, ordinata),
 -upodobijo točko z danima koordinatama v ravnini, preberejo koordinati dane točke v koordinatnem sistemu in ju zapišejo kot urejen par števil,
 -poznajo in uporabljajo pojma neodvisna in odvisna spremenljivka,
 -berejo grafe,
 - upodobijo množice točk, ki ustrezajo pogojem $a \leq x$, $x \leq a$, $a \leq x \leq b$ na številski osi,
 - k besedilu sestavijo algebrski izraz, ga tabelirajo in narišejo ustrezen graf;

nariše graf premega in obratnega sorazmerja (podatke razbere iz preglednice)

ločuje in uporablja pojma neodvisna, odvisna spremenljivka

prikaže odvisnosti med spremenljivkami in veličinami z različnimi reprezentacijami (točkovni prikaz/graf, preglednica, predpis, besedni opis)

bere in interpretira različne reprezentacije funkcij v matematičnih in življenjskih kontekstih ter prehaja med njihovimi reprezentacijami

bere grafe funkcij

UN 2011

- 9.
- upodobijo množico točk na realni osi in v koordinatnem sistemu,
 - opišejo odvisnost dveh količin s funkcijskim (simboličnim) zapisom, s preglednico in z grafom (po točkah),
 - opredelijo premo in obratno sorazmerje ter poznajo pomen koeficienta pri premem in obratnem sorazmerju,
 - zapišejo ustrezna funkcijska zapisa: $f(x) = kx$ in $f(x) = x k$
 - zapišejo ustrezne funkcijske predpise s premim in obratnim sorazmerjem,
 - opredelijo linearno funkcijo $y = kx + n$ (graf, pomen koeficientov k in n , lega točke glede na premico),
 - grafično in računsko ugotovijo, ali dana točka leži na premici,
 - določijo presečišči premice z obema koordinatnima osema,
 - grafično določijo presečišče premic,
 - zapišejo enačbo premice (če poznamo koeficient in točko ali koeficienta k , n),
 - določijo ničlo na grafu linearne funkcije,
 - izračunajo ničlo funkcije.

UN 2024

- nariše graf linearne funkcije s predpisom $f(x)=kx+n$**
- reši besedilne naloge v povezavi s premim in obratnim sorazmerjem**
- računsko ugotovi, ali dana točka leži na grafih različnih funkcij, ki so dane z grafi in s predpisi**
- iz grafov različnih funkcij prepozna ničle in začetne vrednosti funkcije, začetne vrednosti tudi izračuna
- izračuna začetne vrednosti različnih funkcij, ki so podane s predpisi
- iz grafov dveh funkcij ugotovi presečišča**
- izračuna presečišče grafov dveh linearnih funkcij
- prikaže in interpretira različne funkcije v matematičnih in življenjskih kontekstih ter prehaja med njihovimi reprezentacijami**

Poučevanje funkcije v praksi (T. Hodnik, OŠ Tržič, 2 skupini osmošolcev)

Kratka predstavitev učne priprave za obravnavo funkcije

Standardi znanja:

- učence pozna pojem funkcija kot predpis in njene ključne lastnosti (vsak element iz definicijskega območja ima eno vrednost glede na predpis);
- učene loči odvisne in neodvisne spremenljivke;
- učenec pozna različne reprezentacije funkcij (točkovni prikaz, graf funkcije) in ga interpretira z vidika spremenljivk.

Uvod

1. Pogovorimo se, kaj pomeni predpis v običajnem diskurzu (nekomu nekaj predpišemo, kaj lahko predpišemo, v katerih situacijah ga uporabljamo).
2. Z učenci izvedemo konkretno dejavnost in sicer tako, da določenim učencem damo rumeno barvico, naredimo čop iz las... Ali ta predpis lahko velja za katerega koli učenca? Predpis, da dodelimo barvice, da, glede oblikovanja čopa pa le tistim, ki imajo dovolj dolge lase.
Izziv: Ali je podobno tudi pri številih? Ali za vsako število lahko izberemo poljuben predpis. Spomnimo se na deljenje s številom 0, koren negativnih števil...
3. Obravnavamo še druge predpise, ki jih ne moremo izvesti konkretno v razredu npr.:
 - Krajem predpišemo okrajšavo (npr. Kranj --- KR)
 - Slovenskim občinam predpišemo grb

4. Pri vsakem od primerov navedemo nekaj zgledov. Kakšen zapis uporabimo? Uporabila sem zapis predpisa s puščico, npr. pri predpisu za kraje in njihove okrajšave na reg. tablicah (Kranj \rightarrow KR, Maribor \rightarrow MM... kraj \rightarrow okrajšava).

5. Pri krajih in okrajšavah smo obravnavali tudi to, da imajo različni kraji lahko enake okrajšave na reg. tablicah: npr. Škofja Loka ima KR, Tržič ima KR, Jesenice imajo KR...

Povzamemo, da so predpisi lahko številčni, lahko pa tudi drugačni (npr. grafični, konkretni).

6. Poudarimo, da moramo pri predpisu vsakemu članu/elementu, ki mu nekaj predpisujemo, pripisati le eno vrednost. Npr. vsakemu stolu na eno mizo, vsakemu učencu eno številko čevljev ..., lahko pa več učencem pripišemo isto številko čevljev, več krajem enako okrajšavo na reg. tablici...

Izziv za učno uspešnejše: ali je odnos, letni čas \rightarrow učenec, rojen v tem letnem času, glede na naše pravilo tudi predpis? Utemeljitev.

7. Nato se pogovorimo o spremenljivkah. Najprej o sami besedi v povezavi s spreminjanjem, nato pa izpostavimo, kako izbiramo učence, kraje, občine iz naših primerov. Ugotovimo, da jih lahko izberemo poljubno (včasih imamo tudi omejitve), zato jim rečemo neodvisne spremenljivke. Navedemo primere neodvisnih spremenljivk v naših primerih.

Nato se vprašamo, kaj smo tem neodvisnim spremenljivkam predpisali, kako smo jih spremenili? Ali tudi te lahko poljubno izberemo? Določa nam jih predpis, zato so to odvisne spremenljivke. Spet se vrnemo na zgornje primere.

Uporabimo še nov primer: učencem prepisemo začetni črki imena in priimka. Kaj je tu neodvisna in kaj odvisna spremenljivka?

8. Učencem nato predstavim, da je drugo ime za predpis v matematiki funkcija. Neodvisne spremenljivke so običajno števila.

9. Sledi dejavnost ugotavljanja funkcijskih predpisov s ,strojem predpisov‘.

- V 'stroj' vnesem 5 barvic in jih dobim 7, 3 in dobim 5, 0 in dobim 2... Predpis?
- Lastni primeri učencev s ,strojem predpisov‘
- Učence spodbudim, da podajo kakšen predpis za števila: npr. dvakratnik števila, za 5 manjše število... Naredimo nekaj primerov s števili in puščicami. Izberemo npr. število 1 in zapišemo petkratnik števila, 2 in petkratnik... (podpišemo en primer pod drugega, s puščicami, zaključimo z zapisom $x \rightarrow 5x$)

10. Namesto $x \rightarrow 5x$ zapišemo $f(x) = 5x$ (torej f pomeni funkcija ali predpis, ki vsakemu izbranemu x določi petkratnik). Zapišemo nekaj zapisov funkcij, jih preberemo, tabeliramo. Pogovorimo se o številih, ki jih običajno izberemo.

11. Nato predstavim, da funkcijo lahko predstavimo tudi z grafom, rečemo mu graf funkcije.

Izberem primere za točkovne prikaze (graf za funkcijski predpis ,okrajšava kraja', ,številka čevlja učenca') Bi lahko povezali točke na grafu? Zakaj da oz. zakaj ne?

Kratka refleksija – dva izziva

1. izziv: puščični zapis preide v simbolnega, npr. $x \rightarrow 5x$ v $f(x) = 5x$.
(morda rešitev v povezavi z običajnim diskurzom: kraj \rightarrow okrajšava kraja, nato krajše ,okrajšava kraja', kar povežemo z $f(x)$, pri čemer je f : okrajšava, x : kraj...)
2. Izziv: tabeliranje in nato prehajanje v zapis $y = 5x$ (graf funkcije zapišemo $y = 5x$, ne več $f(x) = 5x$, kar npr. uporabimo v tabeli – v novem predlogu tega razlikovanja eksplicitno nismo zapisale)
3. Izziv: vpeljava novih terminov in uporaba
(matematični diskurz kot preplet besed iz običajnega diskurza (predpis, funkcija), matematičnih terminov (funkcija, graf) in navodil)

Sklep

- Problemov v našem šolstvu je veliko, preveč.
- Kakšno funkcijo bo (če) imel nov učni načrt pri reševanju problemov v osnovni šoli, bomo videli.
- Funkcija učitelja je posredovanje znanja učencu. Le z znanjem opremljeni učenci bodo lahko funkcionalni zase in v družbi.
- V dobi umetne inteligence ima znanje, ki ga ima posameznik, še pomembnejšo funkcijo kot prej.