Matematika vabi k modeliranju in uporabi modelov

Sanja Ban, mag. Vesna Parkelj

Šolski center Novo mesto, Šegova ulica 112, 8000 Novo mesto

Laško, 11. in 12. november 2024

6. konferenca o učenju
in poučevanju matematike
KUPM 2024

ZAVOD REPUBLIKE SLOVENIJE ZA ŠOLSTVO

REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA VZGOJO IN IZOBRAŽEVANJE

I FEEL SLOVENIA

Sofinancira Evropska unija

Zakaj vabi in zakaj ne?

- omogoča sistematično razumevanje in opisovanje realnih pojavov s pomočjo matematičnih konceptov
- lahko napovedujemo, analiziramo, optimiziramo in rešujemo kompleksne probleme
- omogoča nam boljše razumevanje sveta okoli nas ter učinkovitejše odločanje in načrtovanje
- predstavlja izziv za učitelje, saj večina ni šla skozi sistematični proces izobraževanja, ampak so se učili sami in na raznih usposabljanjih v času pedagoškega dela
- prilagajanje potrebam, sposobnostim dijakov in ...im
- proces modeliranja se zdi časovno zahteven
- modeliranje in uporaba modelov v SSI in na ma...

https://5minuteenglish.com/guide-to-english-compound-words/

PRIMERI MODELIRANJA

$$f(x) =-1{,}17x^2 - 0{,}04x + 2{,}91$$

VIR: https://www.travel-slovenia.si/slo/location/solkanski-kamniti-most/

1. PRIMER MODELIRANJA

Zaslužek košarkarja
v NBA ligi
ali
„Rad bi bil Luka“

Vir: Luka Dončič Instagram
/

Modeliranje z eksponentno funkcijo – naloga

Luka je poiskal povprečno vrednost pogodb v tisočih ameriških dolarjih košarkarjev lige NBA. Podatke je našel za leta od 1980 do leta 1998. Želel je preveriti, kako je vrednost pogodb naraščala.

x	0	5	10	15	16	17	18
y	170	325	750	1900	2000	2200	2600

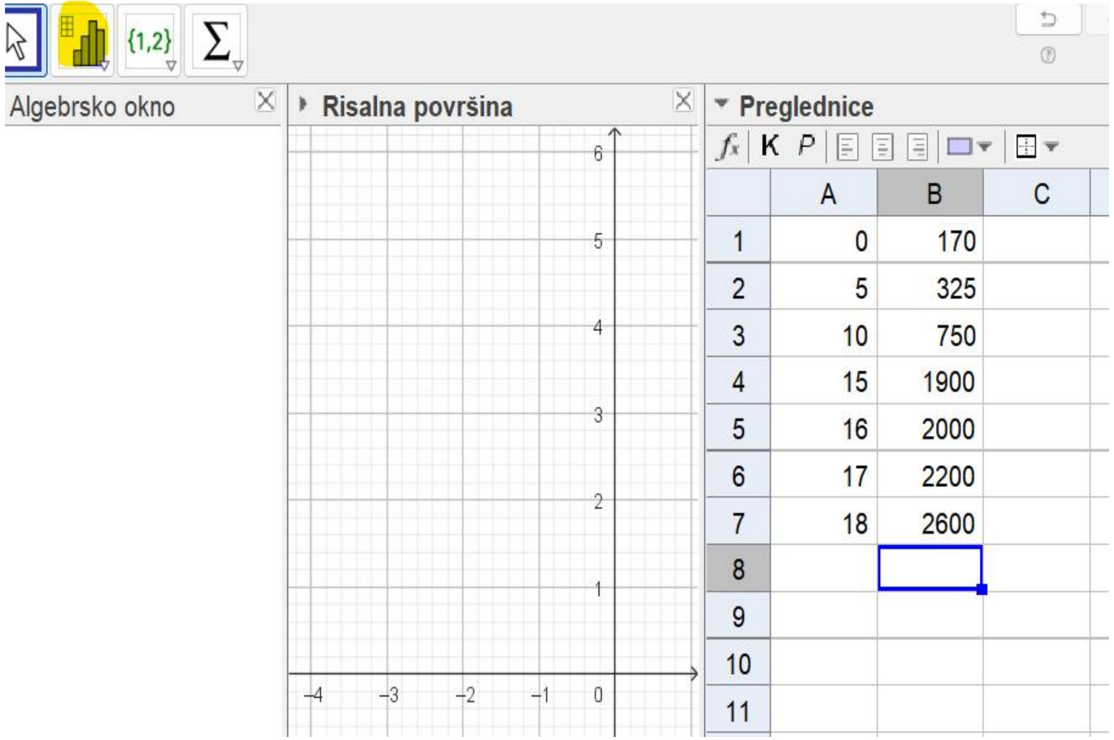
Luka je podatke uredil v tabelo, odločil se je, da bo leta označeval z x in leto 1980 označil z 0, leto 1981 z 1, leto 2024 bi bilo tako 44. Vrednost pogodb je označil z y.

Modelirajte z Geogebro in Luki pomagajte poiskati model.

Po danem modelu izračunajte vrednost pogodb za leto 2024 in nato na spletu preverite, ali model še drži. *(kritično mišljenje, finančna pismenost)*

Modeliranje z eksponentno funkcijo – reševanje

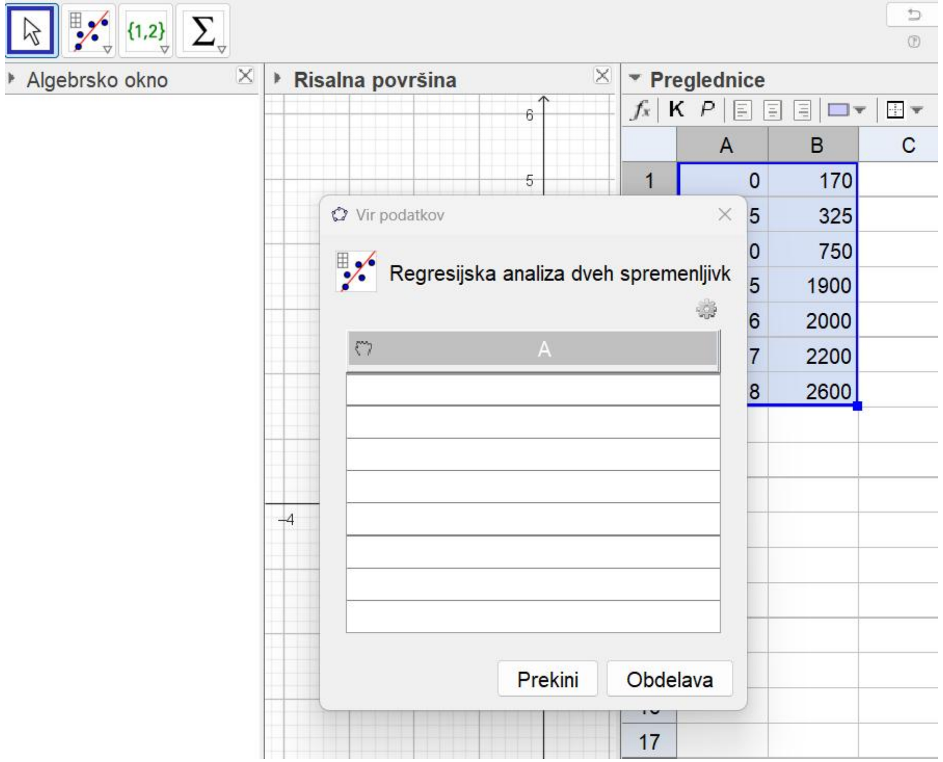
1. korak
V razdelku *Pogled* izberite *Preglednice*.
V preglednico vnesite ali skopirajte vrednosti spremenljivke x v stolpec A in y v stolpec B.
Nato izberite puščico na gumbu s histogramom (rumeno obarvan) in izberite *Regresijska analiza dveh spremenljivk*.



Modeliranje z eksponentno funkcijo – reševanje

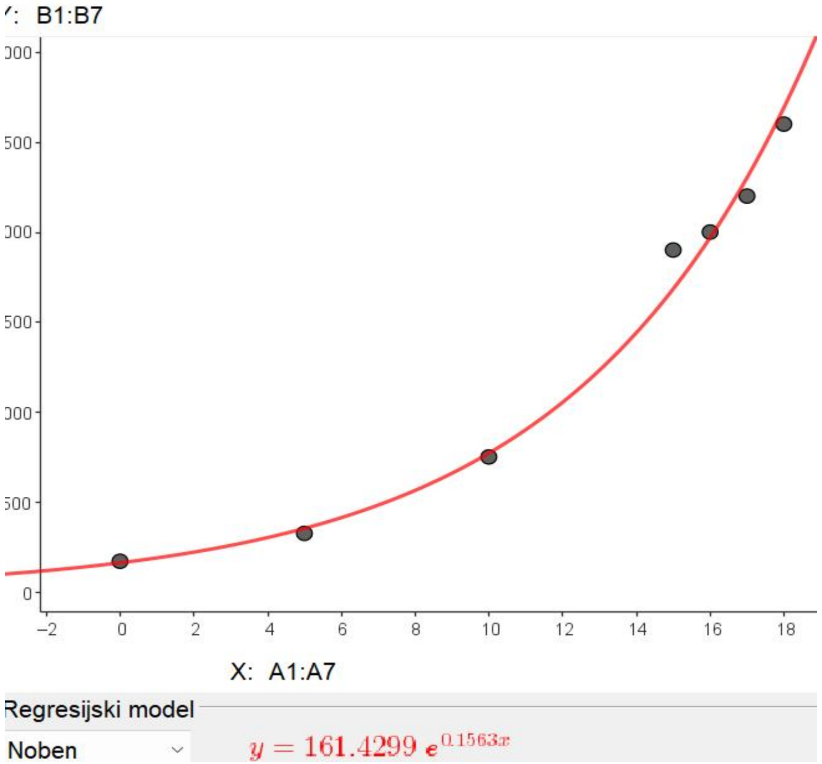
2. korak

Izberite podatke v tabeli in kliknite *Obdelava*.



3. korak

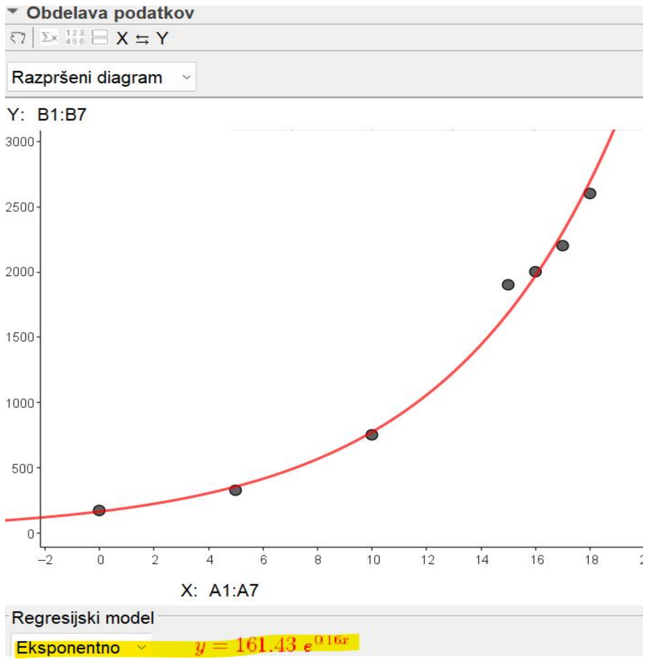
Na desni se vam odpre model, ne da mu poveste, katerega želite.



Modeliranje z eksponentno funkcijo – reševanje

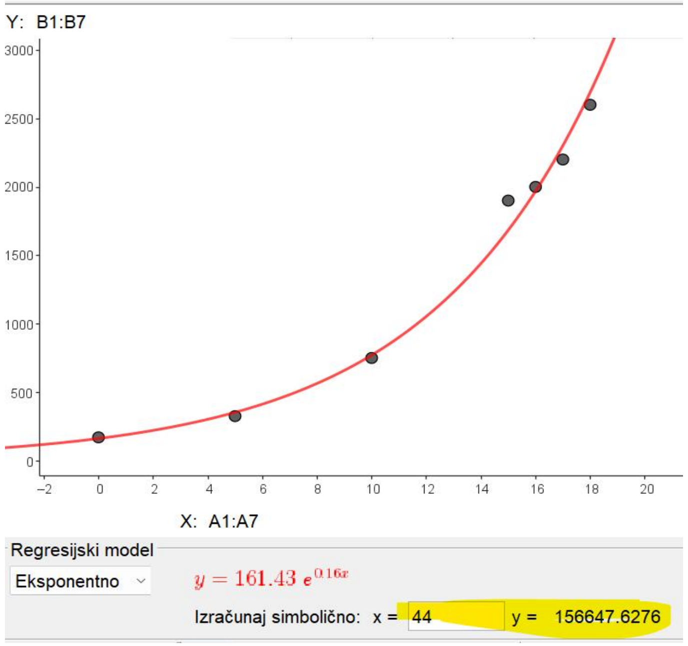
4. korak

Če ugotovite, da gre za eksponentno funkcijo in to določite, Geogebra popravi funkcijo.



5. korak

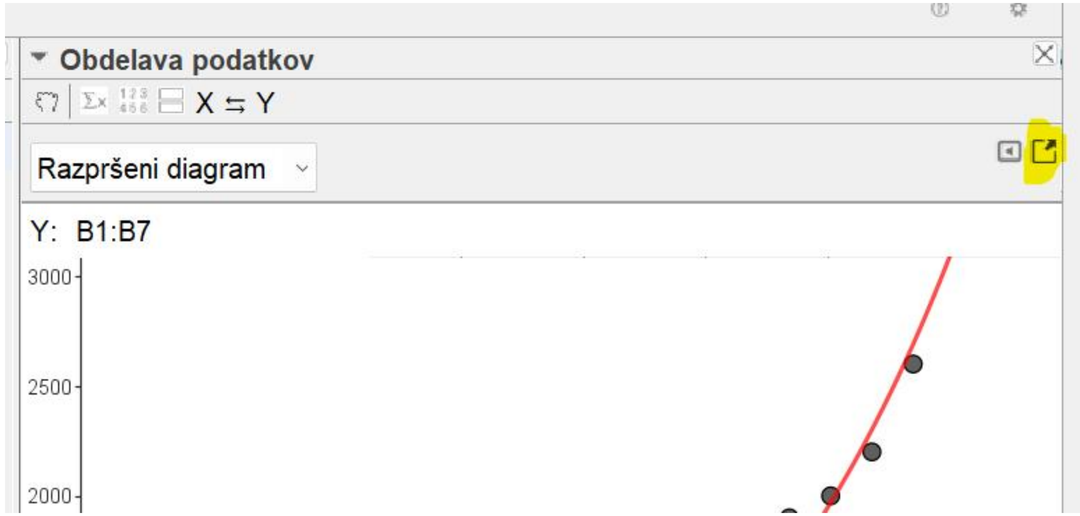
Pod modelom lahko za spremenljivko vnesemo vrednost, Geogebra pa nam izračuna pričakovano povprečno vrednost pogodbe.



Modeliranje z eksponentno funkcijo – reševanje

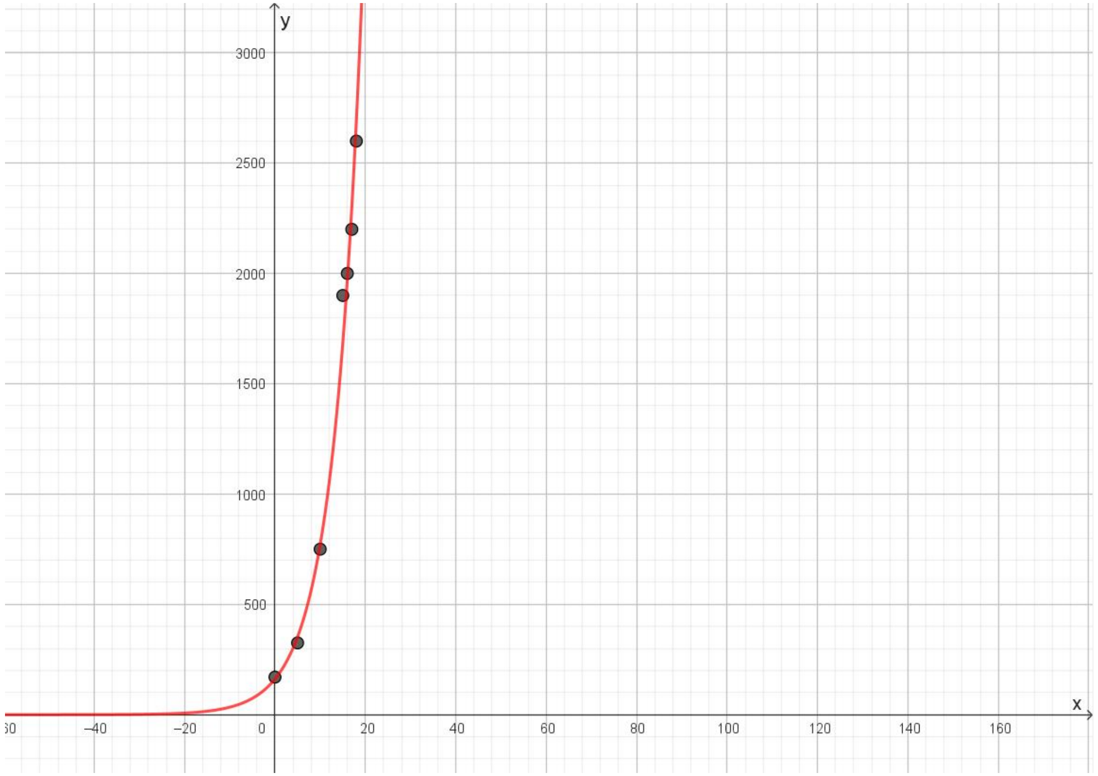
6. korak

Model lahko prenesemo na običajno risalno površino z gumbom v desnem kotu.



7. korak

Model na risalni površini



2. PRIMER MODELIRANJA

Ali hitrost vožnje vpliva na porabo bencina

ali

„Kako naj vsaj malo *prišparam* pri bencinu?“

Vir: Urban Šenica Facebook

Modeliranje s kvadratno funkcijo – naloga

Za nek avto so merili porabo goriva v odvisnosti od hitrosti vožnje.

Hitrost	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120
Poraba	8,97	7,84	7,72	6,9	6,94	6,67	6,69	6,62	6,58	6,94	7,3	7,91	8,58

a. V Excelu ali Geogebri vnesi točke (os x hitrost vožnje, os y poraba goriva).

b. Poišči regresijsko krivuljo - najbolj prilagajočo se krivuljo.

c. Zapiši odvisnost.

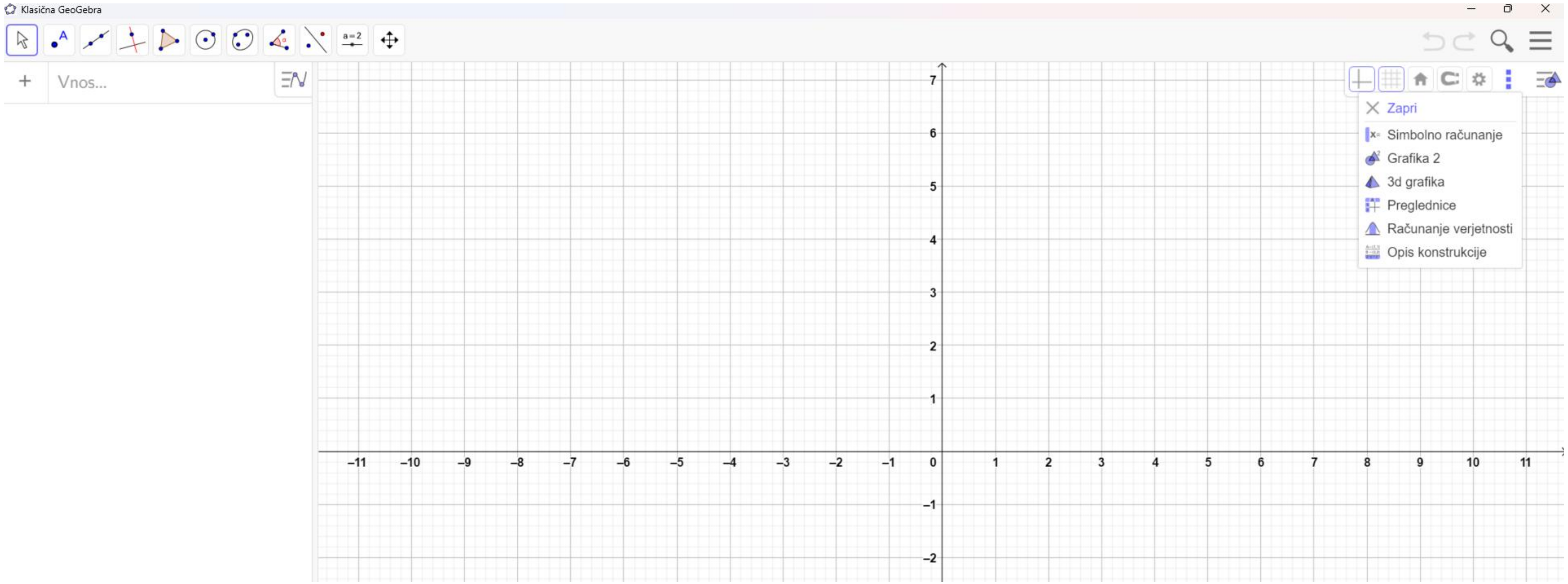
d. Približno določite hitrost, pri kateri je poraba goriva najmanjša.

e. Iz grafa odčitajte, kolikšna bi bila poraba pri hitrosti 140 km/h.

Modeliranje s kvadratno funkcijo – reševanje

1. korak

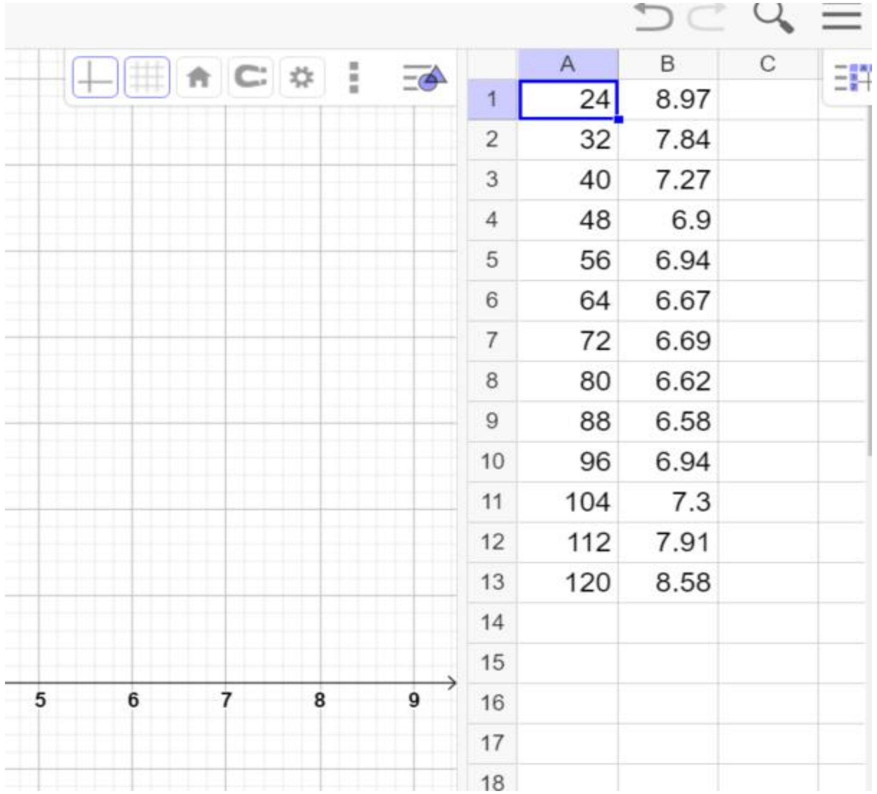
Pod *Preglednice* vnesemo podatke o hitrosti in porabi goriva.



Modeliranje s kvadratno funkcijo – reševanje

2. korak

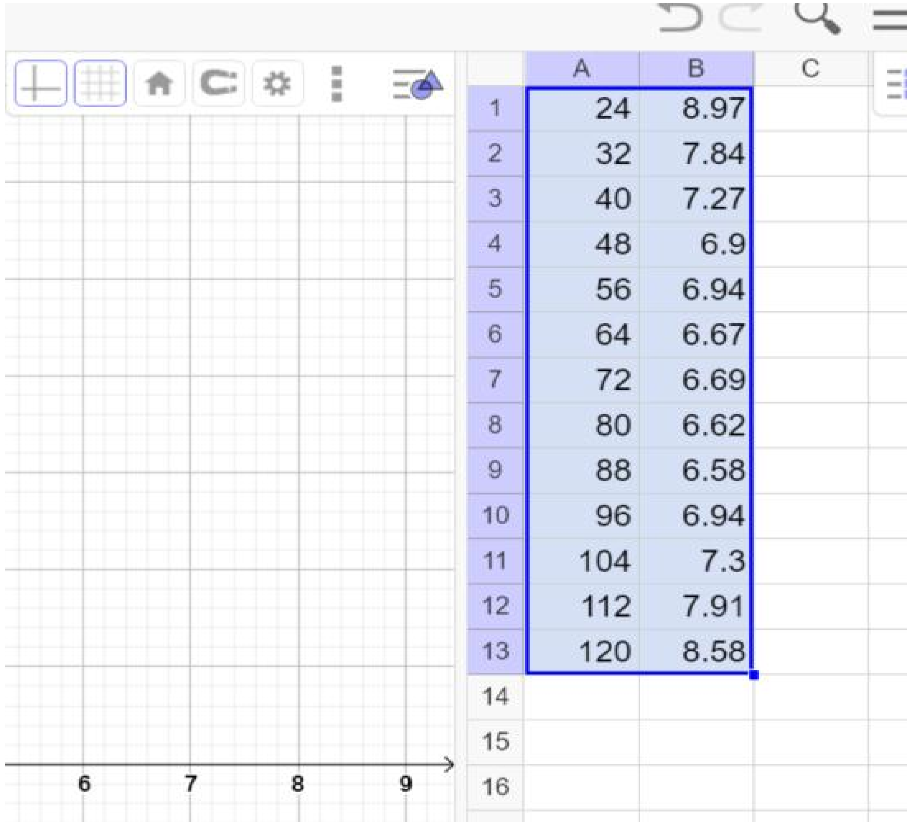
Vstavljeni podatki



	A	B	C
1	24	8.97	
2	32	7.84	
3	40	7.27	
4	48	6.9	
5	56	6.94	
6	64	6.67	
7	72	6.69	
8	80	6.62	
9	88	6.58	
10	96	6.94	
11	104	7.3	
12	112	7.91	
13	120	8.58	
14			
15			
16			
17			
18			

3. korak

Podatke označimo.

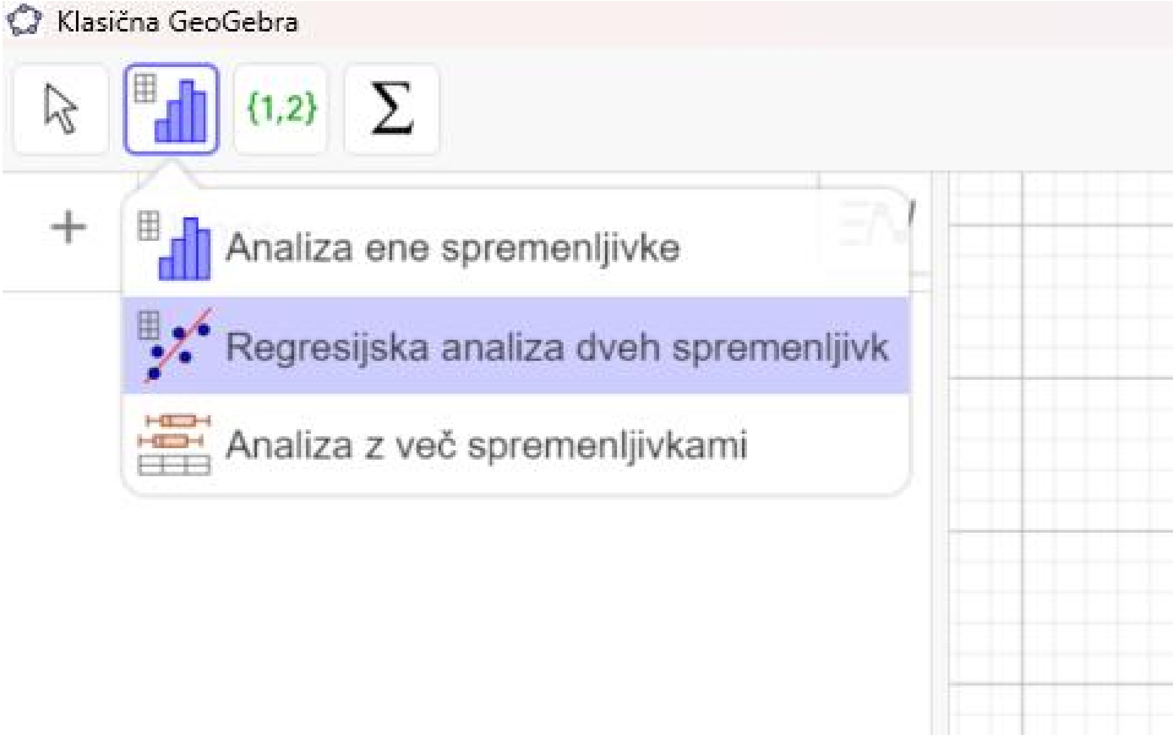


	A	B	C
1	24	8.97	
2	32	7.84	
3	40	7.27	
4	48	6.9	
5	56	6.94	
6	64	6.67	
7	72	6.69	
8	80	6.62	
9	88	6.58	
10	96	6.94	
11	104	7.3	
12	112	7.91	
13	120	8.58	
14			
15			
16			

Modeliranje s kvadratno funkcijo – reševanje

4. korak

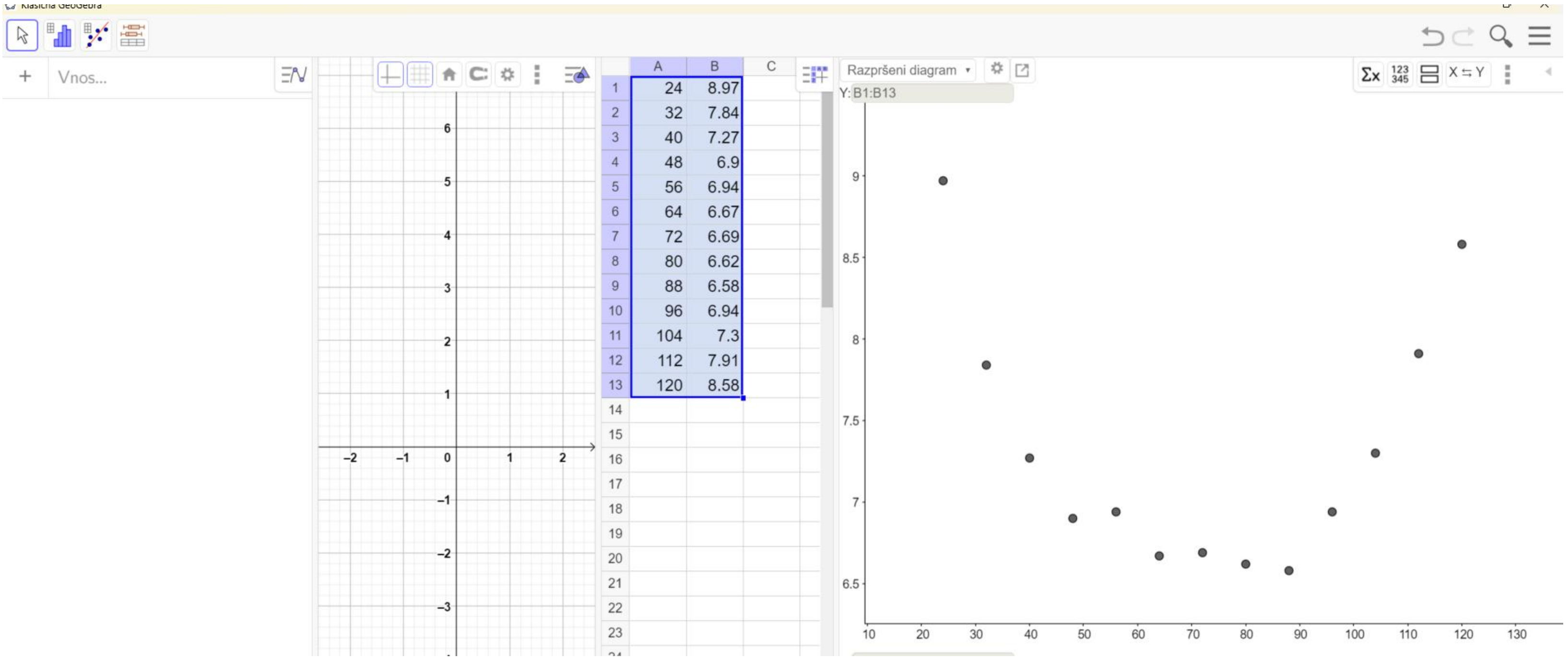
Na levi strani izberemo *Regresijsko analizo dveh spremenljivk*:



Modeliranje s kvadratno funkcijo – reševanje

5. korak

Dobili smo vnesene točke.

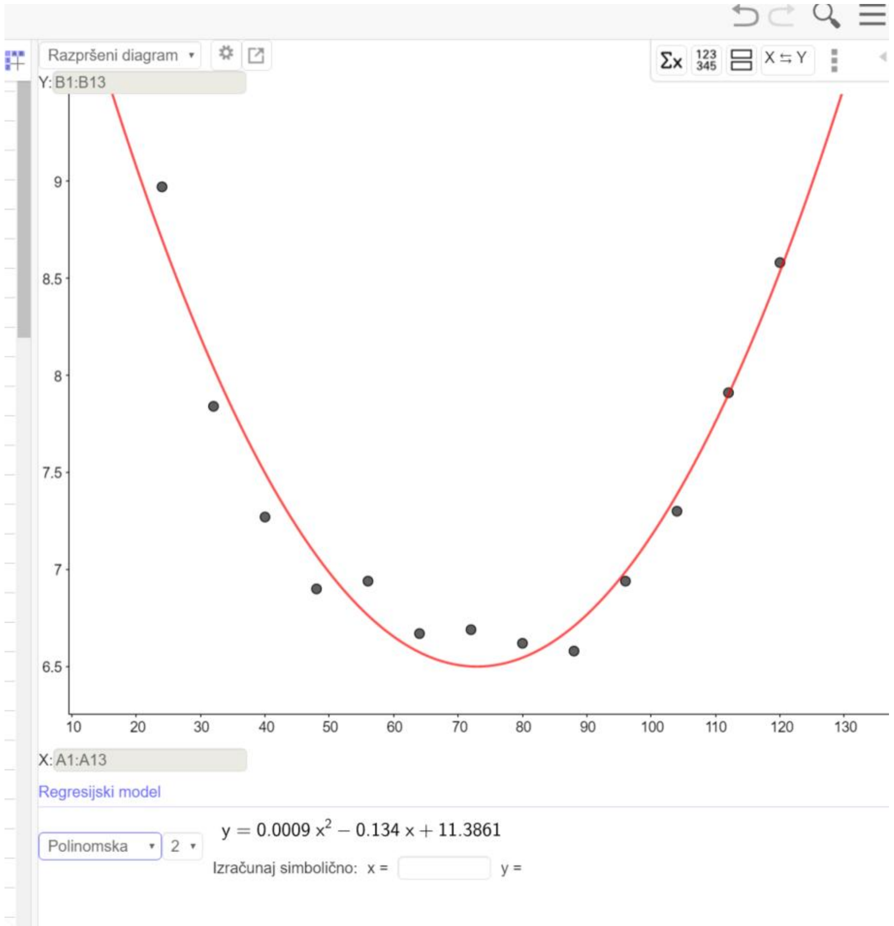


Modeliranje s kvadratno funkcijo – reševanje

6. korak

Oblika razporeditve spominja na kvadratno funkcijo. Zato izberemo regresijski model. To je polinom 2. stopnje.

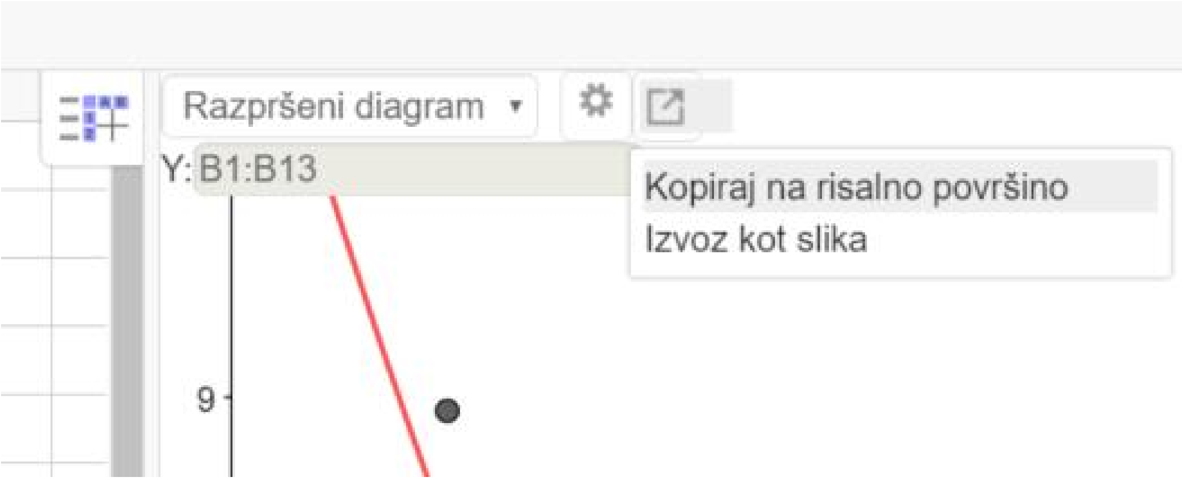
Dobimo kvadratno funkcijo.



Modeliranje s kvadratno funkcijo – reševanje

7. korak

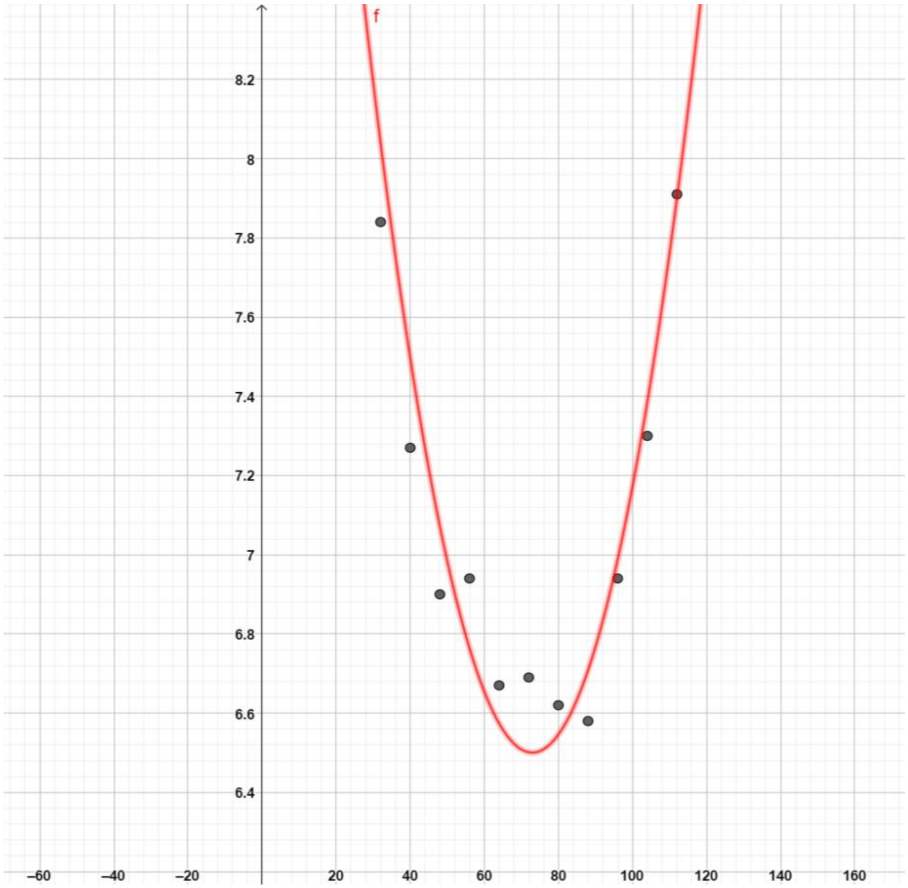
Funkcijo kopiramo na risalno površino:



Modeliranje s kvadratno funkcijo – reševanje

8. korak

Funkcija, ki se najbolj prilega podatkom je kvadratna funkcija $f(x) = 0{,}0009x^2 - 0{,}134x + 11{,}3861$.



Modeliranje s kvadratno funkcijo – reševanje

9. korak
Iz grafa lahko določimo teme funkcije, kar predstavlja tudi najmanjšo porabo goriva, le-to je pri hitrosti 79,9 km/h.

$$T = \mathrm{Minimum}(f, 20, 150)$$
$$\rightarrow (72.94238,\ 6.50023)$$

10. korak
Z vnosom vrednosti $x = 140$ dobimo, da je poraba goriva 10,63 l.

Regresijski model

Polinomska 2 $y = 0.00092\,x^2 - 0.13397\,x + 11.38613$

Izračunaj simbolično: $x =$ 140 $y =$ 10.62958

UPORABE MODELOV

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$$

$$pV = nRT$$

$$A = Fs\cos\varphi$$

$$V = \pi r^2 v$$

$$S = a^2 \sin\alpha$$

$$W_e = \frac{CU^2}{2} = \frac{e^2}{2C}$$

$$N = N_0 2^{-\frac{t}{t_{1/2}}} = N_0 e^{-\lambda t}$$

$$j = \frac{P}{4\pi r^2}$$

$$\sum M_{iA} = 0$$

$$P = 2\pi r^2 + 2\pi r v$$

1. PRIMER UPORABE MODELA

Pri geometriji je vsaka formula za obseg, ploščino, površino in prostornino model.

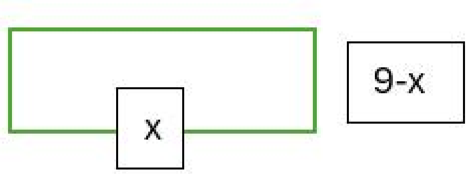
Npr. prostornina in površina kocke ($V = a^3$ in $P = 6a^2$).

2. PRIMER UPORABE MODELA

Ekstremalni problemi, npr. kateri lik z danim obsegom ima največjo ploščino.

PRIMER: Obseg pravokotnika je 18 m. Izračunaj dolžine stranic tako, da bo ploščina pravokotnika največja.

REŠEVANJE: Označimo eno stranico z drugo pa izrazimo s pomočjo obsega npr.

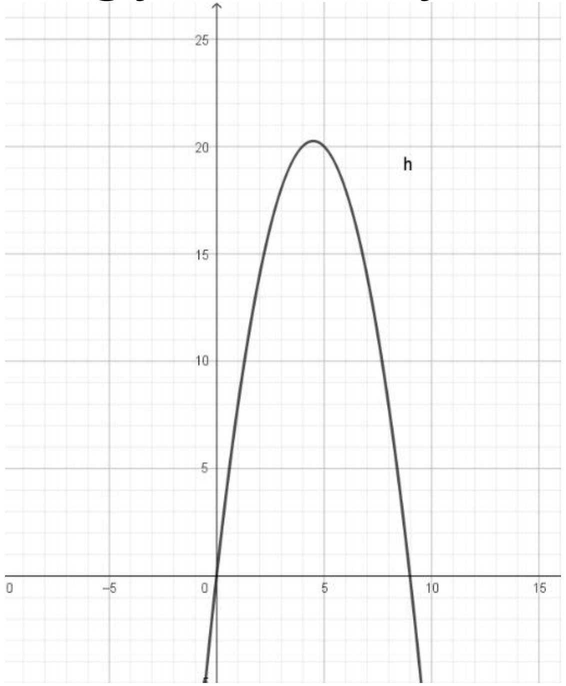


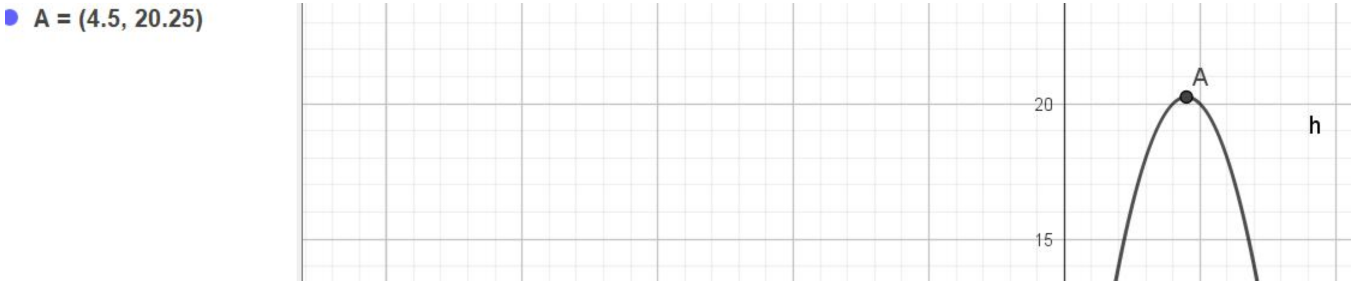
$$y = \frac{18 - 2x}{2} = 9 - x$$

2. PRIMER UPORABE MODELA

Zapišemo formulo za ploščino $S(x) = x(9 - x) = 9x - x^2$.

Naloga je rešljiva v 2. letniku (teme kvadratne funkcije, v 4. letniku – ekstrem, s tehnologijo – v meniju točka izberemo ekstrem in kliknemo na krivuljo





3. PRIMER UPORABE MODELA

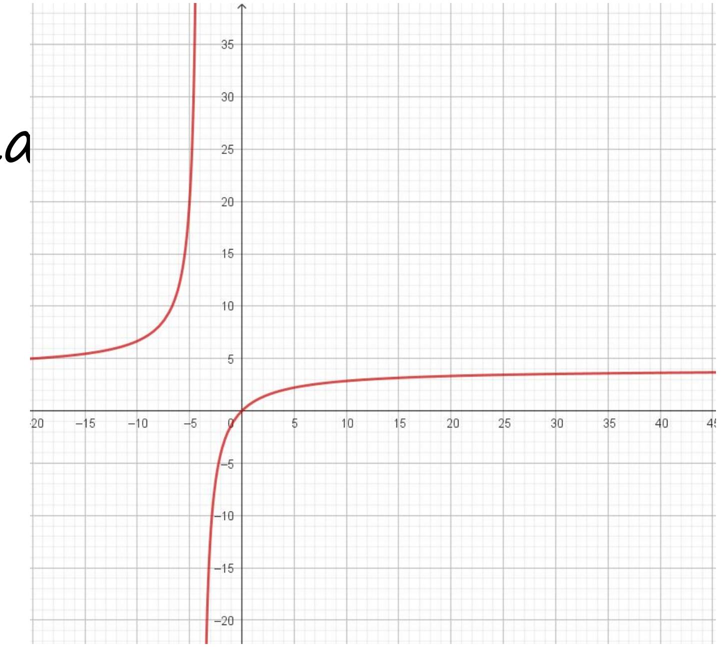
Npr. iz fizike, vzporedna vezava dveh uporov. En upor je $4\ k\Omega$, drug pa neznan. Uporabimo že znano formulo: $\frac{1}{\mathrm{R_n}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

Zapišemo odvisnost nadomestne upornosti v obliki racionalne funkcije: $f(x) = \frac{4x}{4+x}$.

Narišemo lahko na papir ali s tehnologijo.

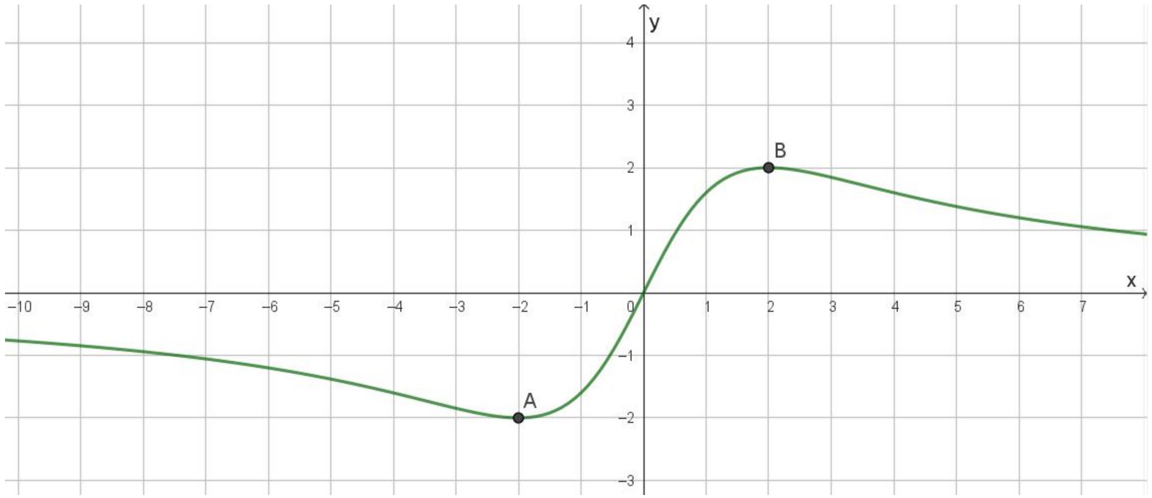
Zanimivo vprašanje bo, kako se nadomestna upornost spreminja oz.

(povezava s fiziko in elektrotehniko)



4. PRIMER UPORABE MODELA

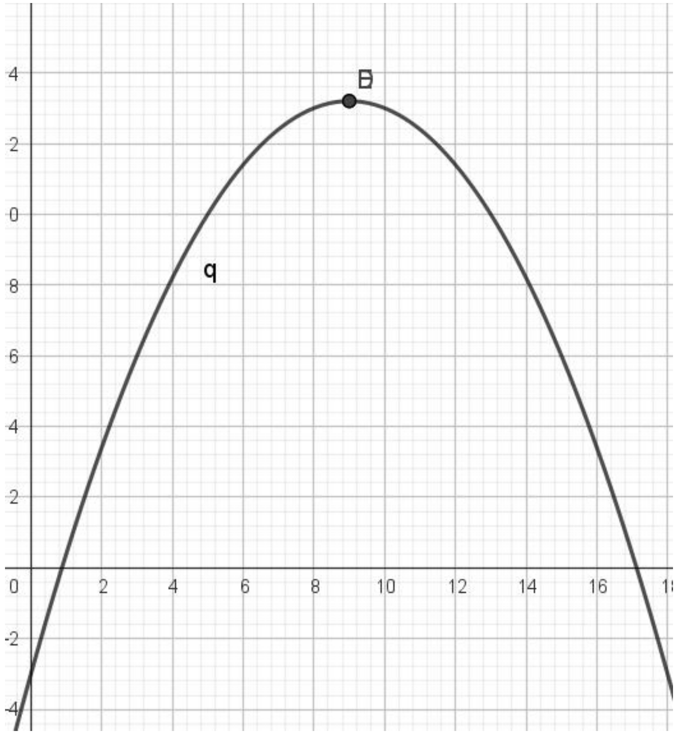
Racionalna funkcija $f(t) = \frac{8t}{t^2+4}$ opisuje koncentracijo zdravila v krvi v v odvisnosti od časa po zaužitem zdravilu. Kdaj bo koncentracija v krvi največja?



VIR: https://www.nasa-lekarna.si/clanki/clanek/odpadna-zdravila/

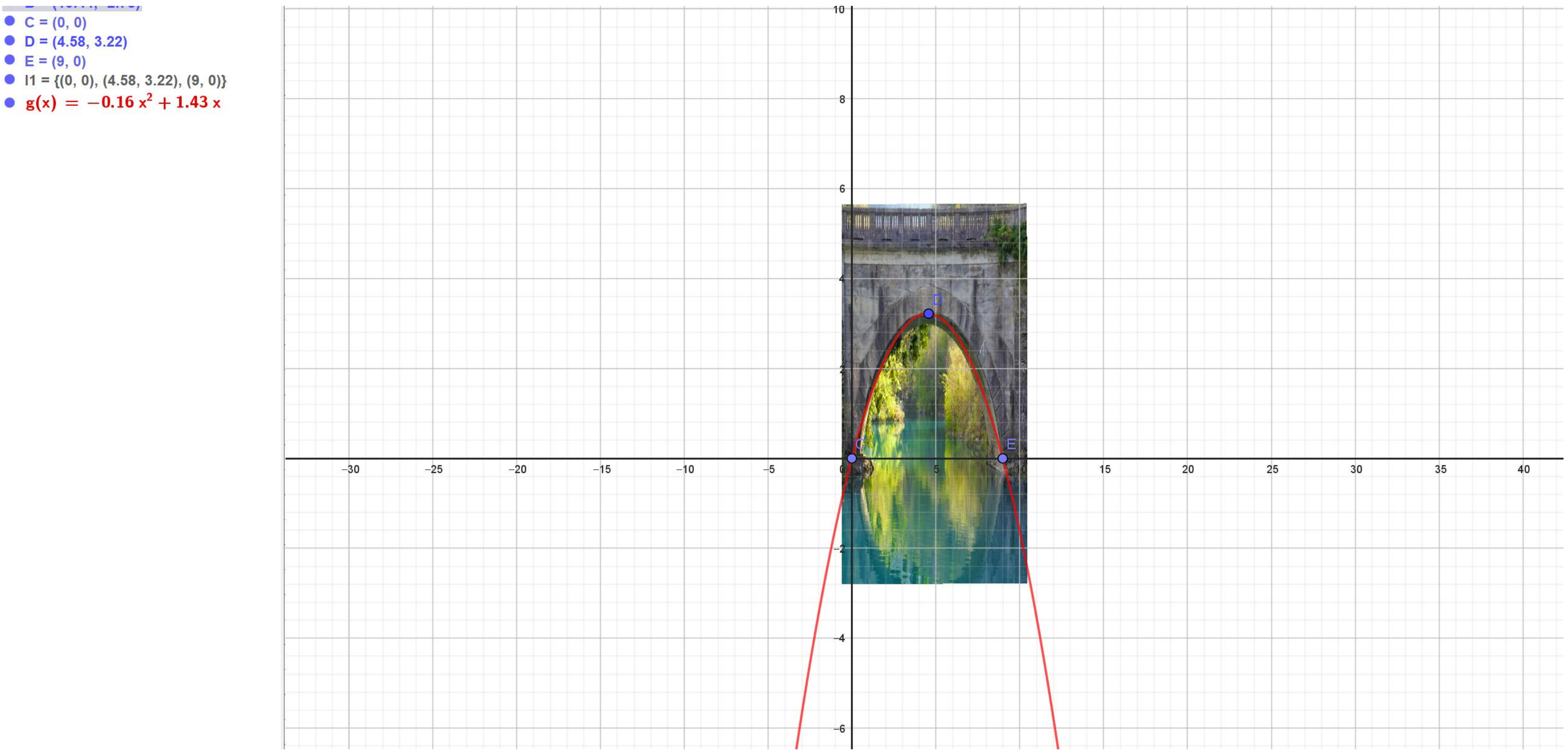
5. PRIMER UPORABE MODELA

Dnevni dobiček podjetja je opisan s funkcijo $d(x) =- 0{,}2x^2 + 3{,}6x - 3$, pri čemer je x število prodanih izdelkov. Izračunajte dnevni dobiček d za 1 in 5 prodanih izdelkov. Koliko bo maksimalni možni dobiček?



6. PRIMER UPORABE MODELA

VSTAVLJANJE SLIKE IN UPORABA MODELA



7. PRIMER UPORABE MODELA

VIR: https://www.junior-partyshop.ch/detektiv-pruefung

UMOR

Zgodil se je umor. Policija je truplo odkrila ob 6.00 zjutraj v sobi s konstantno temperaturo 22°C. Ob odkritju je bila telesna temperatura 30°C, tri ure kasneje pa 26°C. Določi čas smrti.

Po smrti se temperatura trupla spreminja po formuli $T(t) = T_0 + A \cdot e^{-kt}$. Tu je T_0 temperatura okolice, A in k pa sta konstanti. Predznak minus je zato, ker temperatura s časom pada.

Določi vrednost konstant A in k, razmisli o njunem pomenu, nato pa določi/oceni čas smrti.

7. PRIMER UPORABE MODELA

Ker je naloga „pretežka” določimo vrednost konstant A in k s pomočjo digitalne tehnologije.

$$T(t) = 22 + A\,e^{-(kt)}$$

$$= A\,e^{-kt} + 22$$

$$g_1 : T(6) = 30$$

$$= A\,e^{-6k} + 22 = 30$$

$$g_2 : T(9) = 26$$

$$= A\,e^{-9k} + 22 = 26$$

$$\text{Solve}(\{g_1,\ g_2\},\ \{A,\ k\})$$

$$= \left\{\left\{A = 32,\ k = \frac{1}{3}\ \ln(2)\right\}\right\}$$

7. PRIMER UPORABE MODELA

Nato narišemo graf, saj smo s pomočjo tehnologije izračunali konstanti A in k .

NSolve({g₁, g₂}, {A, k})

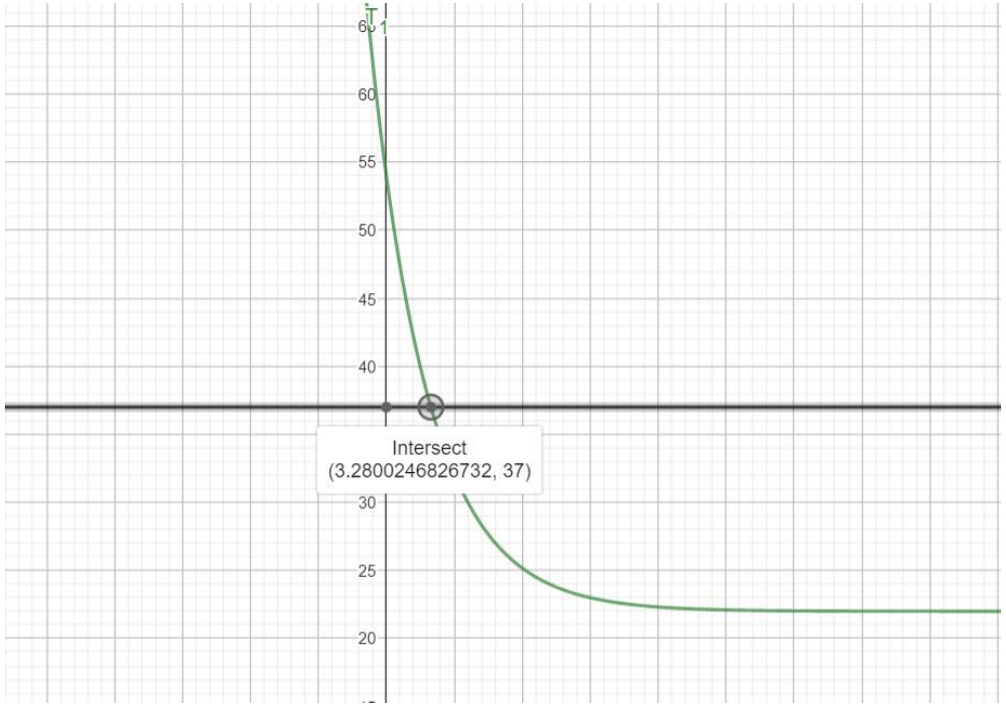
$\approx \{A = 32,\ k = 0.2310490601866\}$

$T_1(t) = 22 + 32\, e^{-(0.231 t)}$

$= \ 32\, e^{\frac{-231}{1000} t} + 22$

7. PRIMER UPORABE MODELA

Vnesemo še povprečno temperaturo človeka – na primer 37°C. Preverimo presečišči grafov in ugotovimo, da je čas smrti 3,28 h (ali 3 h in 17 minut) pred odkritjem. Čas smrti je približno 2.40.

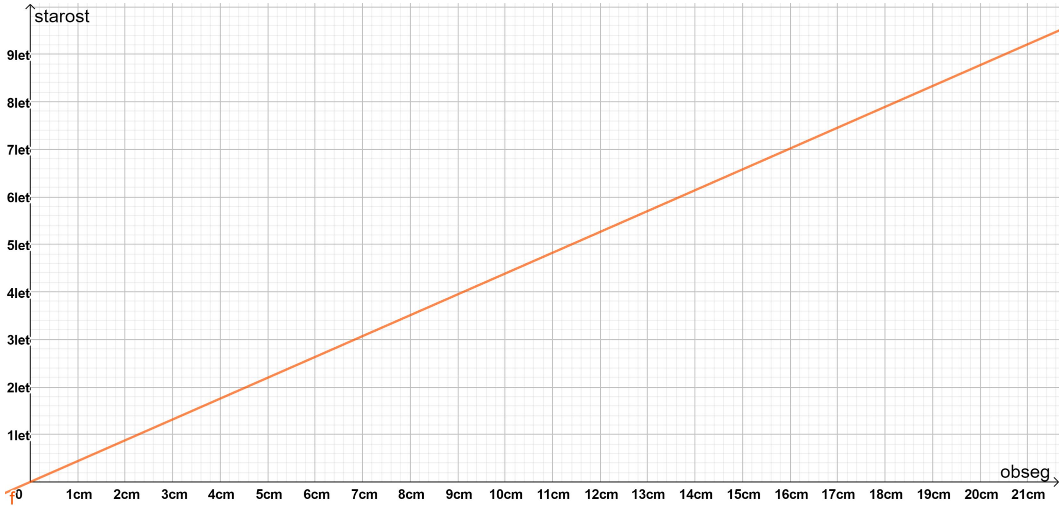


8. PRIMER UPORABE MODELA

Starost drevesa se lahko določi tudi z obsegom debla (v cm) na višini cca. 140 cm. Poznati moramo vrsto drevesa, saj je moramo upoštevati rastni faktor *(k)*, ki je značilen za posamezno vrsto drevesa.

Starost drevesa v odvisnosti od obsega določa naslednja funkcija

$$f(x) = \frac{x \cdot \frac{k}{\pi}}{2{,}54}$$

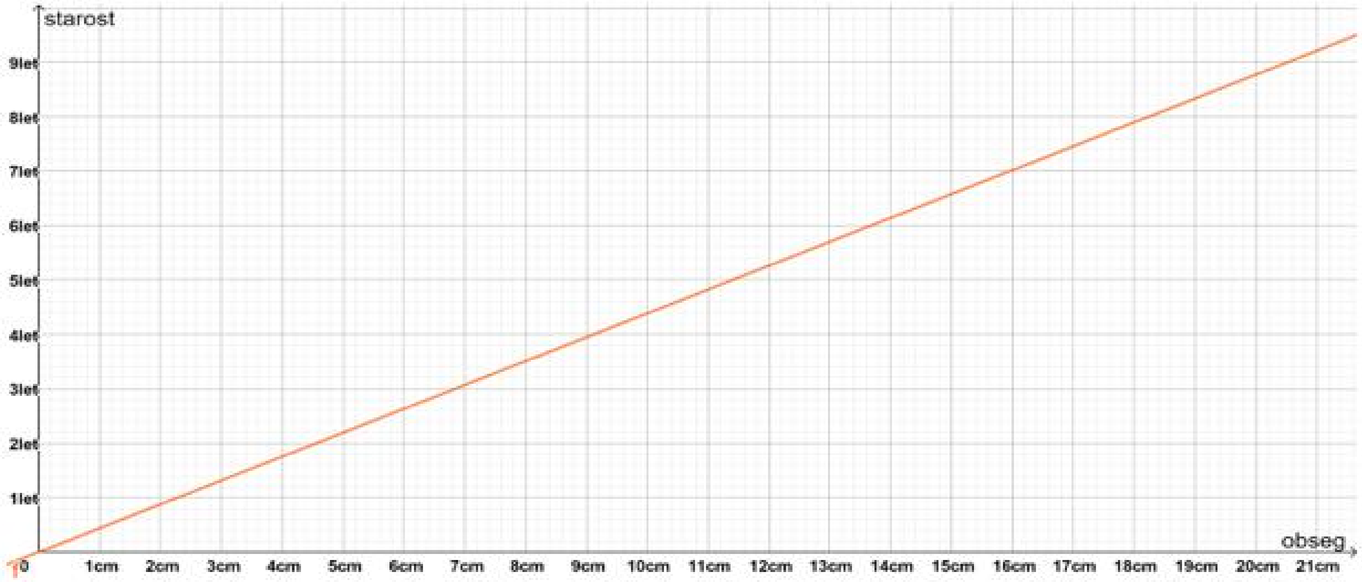


Uporaba modela

Starost drevesa se lahko določi tudi z obsegom debla (v cm) na višini cca. 140 cm. Poznati moramo vrsto drevesa, saj je moramo upoštevati rastni faktor (k), ki je značilen za posamezno vrsto drevesa.

Starost drevesa v odvisnosti od obsega določa naslednja funkcija.

$$f(x) = \frac{x \cdot \frac{k}{\pi}}{2{,}54}$$



HVALA ZA VAŠO POZORNOST

Sanja in Vesna

Laško, 11. in 12. november 2024

**6. konferenca o učenju
in poučevanju matematike
KUPM 2024**

ZAVOD REPUBLIKE SLOVENIJE ZA ŠOLSTVO

REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA VZGOJO IN IZOBRAŽEVANJE

I FEEL SLOVENIA

Sofinancira Evropska unija