S preiskovanjem do razumevanja algebre

mag. Mojca Suban

Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Laško, 11. in 12. november 2024

**6. konferenca o učenju
in poučevanju matematike
KUPM 2024**

ZAVOD REPUBLIKE SLOVENIJE ZA ŠOLSTVO

REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA VZGOJO IN IZOBRAŽEVANJE

I FEEL SLOVENIA

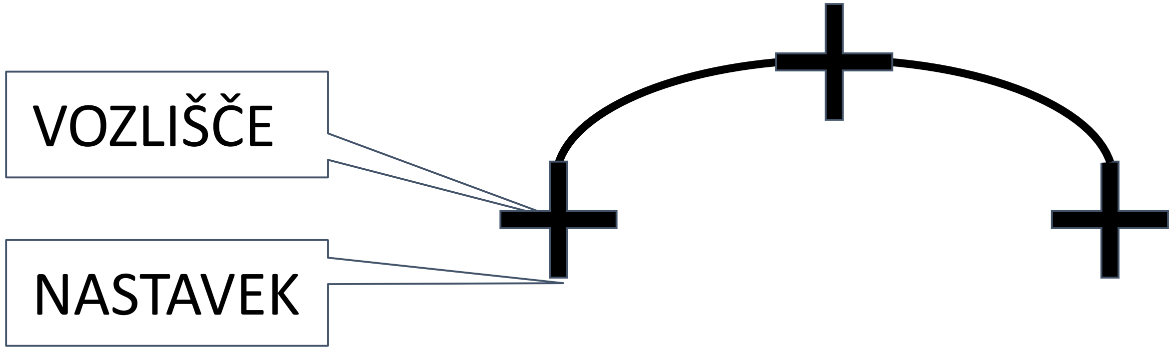
Sofinancira Evropska unija

Oris

1. Uvodna preiskovalna dejavnost (v vlogi učečega) 20 min
2. Algebra in kaj jo »dela« zahtevno? 10 min
3. Algebra v prenovljenem učnem načrtu za matematiko v 2. in 3. VIO 5 min
4. Učenje in poučevanje s preiskovalnim pristopom 5 min
5. Algebra skozi preiskovanje (postaje) 40 min
6. Refleksija in zaključek 5 min

PRIMER: Poveži in zmagaj

V vlogi učečega…

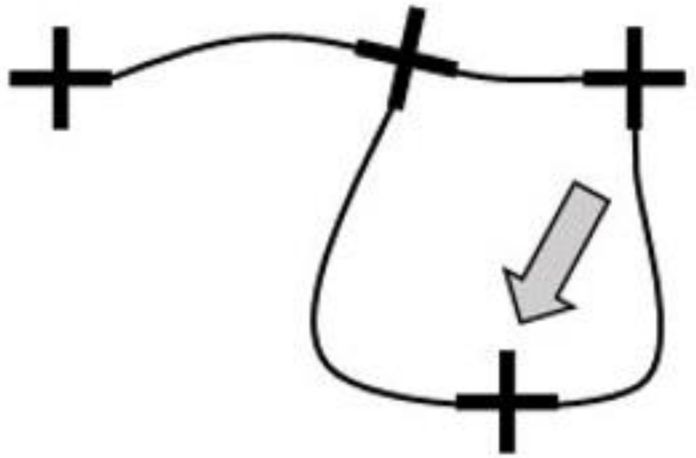


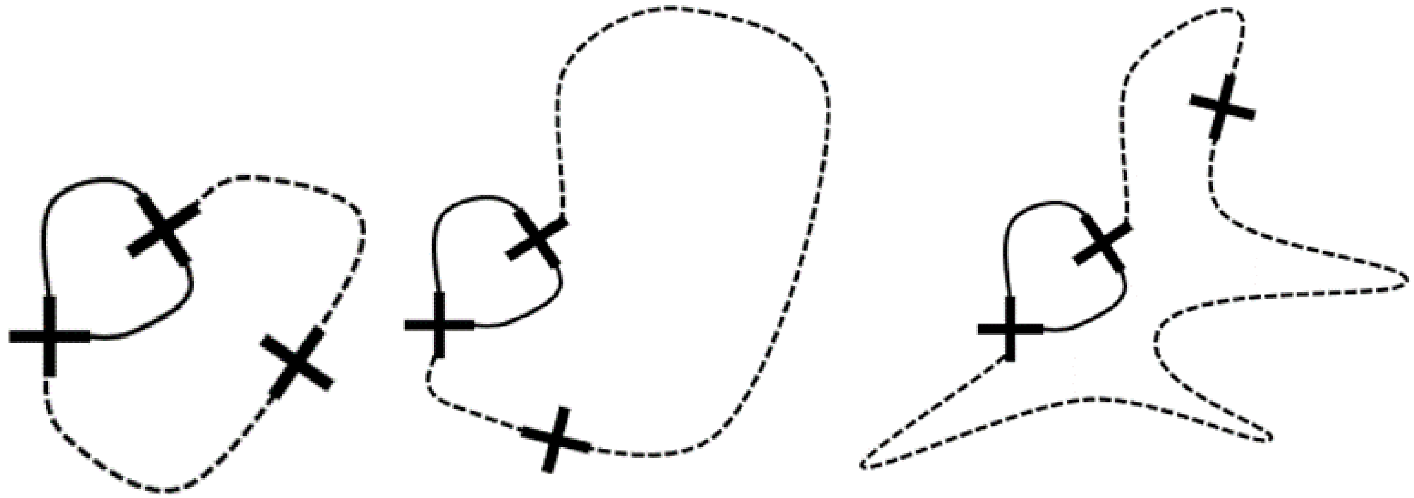
Navodila: Dva igralca izmenično vlečeta *poteze*. *Poteza* pomeni, da igralec s črto poveže dva različna prosta nastavka na vozliščih (na istem ali na dveh različnih vozliščih) in na črto nariše novo vozlišče, kot prikazuje slika. Pri tem črta ne sme sekati drugih črt, vozlišč ali nastavkov. Igro izgubi igralec, ki prvi ne more več povezati dveh nastavkov brez prečkanja obstoječih črt.

Raziščite, kakšna je zmagovalna strategija. Zapišite čim več svojih ugotovitev.

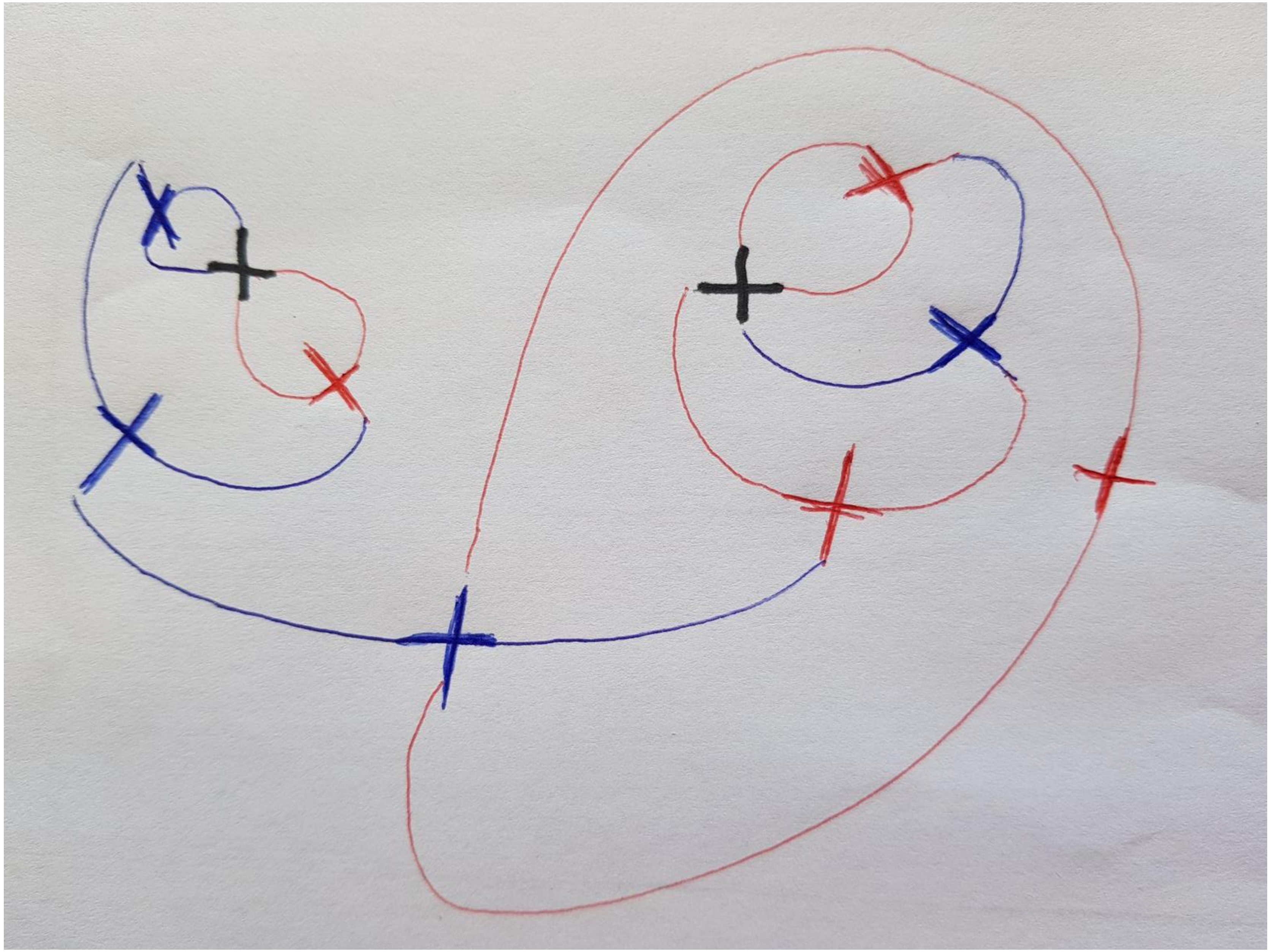
Vir: [Freudenthal Institute]

Dodatni napotki za igranje





Primer igranja



ODZIV UDELEŽENCEV

LessonUp.app

Nekaj ugotovitev

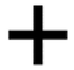
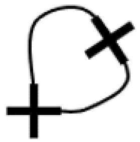
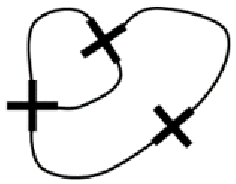
Število potez do zmage je vedno enako.

Igra se konča, ko je v vsakem območju en prost nastavek.

Igra se konča, ko je število potez enako številu nastalih območij.

Število prostih nastavkov je ves čas enako. (Prosti nastavek je tak nastavek, od katerega ne vodi nobena črta.)

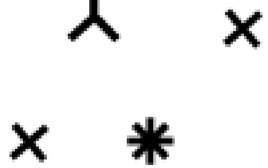
Sistematično beleženje rezultatov za n=1

Situacija	Število potez *z*	Število vseh prostih nastavkov *p*	Število območij *g*
	0	4	1
	1	…	2
	2	…	…
…	…	…	…

Možne razširitve igre

- spreminja se število vozlišč (posplošitev za *n*)

- spreminja se število nastavkov na vozlišč
  - na vseh vozliščih je število nastavkov enak
  - na vozliščih je število nastavkov različno (d_1, d_2, ..., d_n)



ŠTEVILO VOZLIŠČ n	ŠTEVILO NASTAVKOV V VOZLIŠČU d	ŠTEVILO POTEZ z	ZMAGA
1	4	3	prvi
2	4	8	drugi
3	4	13	prvi
4	4	18	drugi
5	4	23	prvi
⋮		⋮	
n	4	$n(d+1)-2$	n lih → prvi n sod → drugi

V katerem razredu bi uporabili dejavnost? Pri katerem sklopu?

Katere cilje in standarde bi učenci dosegali z dejavnostjo?

Katere spretnosti in veščine razvijajo?

Kako pogosto uporabljate preiskovalni pristop v svoji pedagoški praksi?

O algebri

- Veda o računanju s črkami ali kakimi drugimi znaki (SSKJ)

- al-jabr (restoration,completion)

- Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī (c. 780–850): njegovo delo The Compendious Book on Calculation by Completion and Balancing postavi algebro kot matematično disciplino, neodvisno od geometrije in aritmetike.
- http://www.khanacademy.org/math/algebra/introduction-to-algebra/overview_hist_alg/v/origins-of-algebra (KHANAcademy)

Abstraktno → odmisliti konkretno

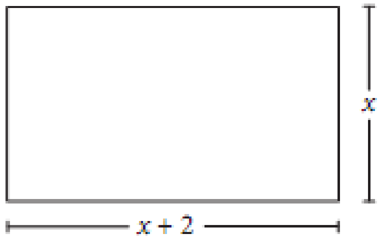
Vir: Wikipedia

Zakaj je algebra zahtevna veja matematike?

- kompleksna in raznovrstna uporaba simbolov
  - npr. zapis z dvema znakoma: 23 pomeni zapis števila z mestno vrednostjo, $1\frac{1}{2}$ pomeni vsoto, xy pa produkt
- algebra kot posplošitev aritmetike zahteva dobro aritmetično predznanje, vendar je potreben premik od aritmetičnega načina razmišljanja k algebrskemu
- zahteva abstraktno razmišljanje (abstraktno → odmisliti konkretno)
- pomembno jo je vidno povezati z drugimi vejami matematike, da ne deluje izolirano in nepovezano (npr. z geometrijo)

Uporaba simbolov v algebri:

- Omogoča formuliranje aritmetičnih zakonitosti, npr.: $a+b=b+a$ in na ta način odpira pot k sistematičnemu raziskovanju lastnosti realnih števil
- Omogoča ‚vpeljavo' neznanih številih, enačb in njihovo reševanje, npr.: zapiši število x tako, da je $3x+10=19$
- Omogoča opis funkcijskih odnosov med veličinami, npr.: če prodaš x vstopnic, boš imel $5x-8$ evrov dobička.



Kateri izraz predstavlja ploščino narisanega pravokotnika?

Ⓐ $x^2 + 2$

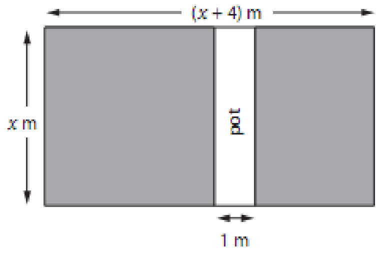
Ⓑ $x^2 + 2x$

Ⓒ $2x + 2$

Ⓓ $4x + 4$

Pravilni odgovor: B
Kognitivno področje: uporaba znanja
Mejnik znanja: najvišja raven znanja
Vsebinsko področje: algebra; algebrski izrazi

Rezultati v Sloveniji	Leto	Odstotki odgovorov A	Odstotki odgovorov B	Odstotki odgovorov C	Odstotki odgovorov D	Odstotki pravilnih odgovorov med deklicami	Odstotki pravilnih odgovorov med dečki
	2007	46,7	31,4	14,6	6,4	32,4	30,4
	2011	44,4	32,1	15,8	4,8	32,8	31,4



To je načrt pravokotnega vrta.

Beli del je pravokotna pot, široka 1 meter.

Kateri izraz predstavlja ploščino osenčenega dela vrta v kvadratnih metrih?

Ⓐ $x^2 + 3x$

Ⓑ $x^2 + 4x$

Ⓒ $x^2 + 4x - 1$

Ⓓ $x^2 + 3x - 1$

Pravilni odgovor: A
Kognitivno področje: uporaba znanja
Mejnik znanja: nad mejnikom najvišje ravni znanja
Vsebinsko področje: algebra; algebrski izrazi

Rezultati v Sloveniji	Odstotki odgovorov A	Odstotki odgovorov B	Odstotki odgovorov C	Odstotki odgovorov D	Odstotki pravilnih odgovorov med deklicami	Odstotki pravilnih odgovorov med dečki
	13,3	15,9	60,3	6,3	10,5	16,5

M042202

Razred je obiskal muzej. Kosilo za ves razred je stalo B zedov. Vstopnina v muzej je bila 4 zede na učenca. V razredu je p učencev. Celoten izlet je stal K zedov. S katerim izrazom izračunamo K?

Ⓐ $K = B + 4$

Ⓑ $K = B + 4p$

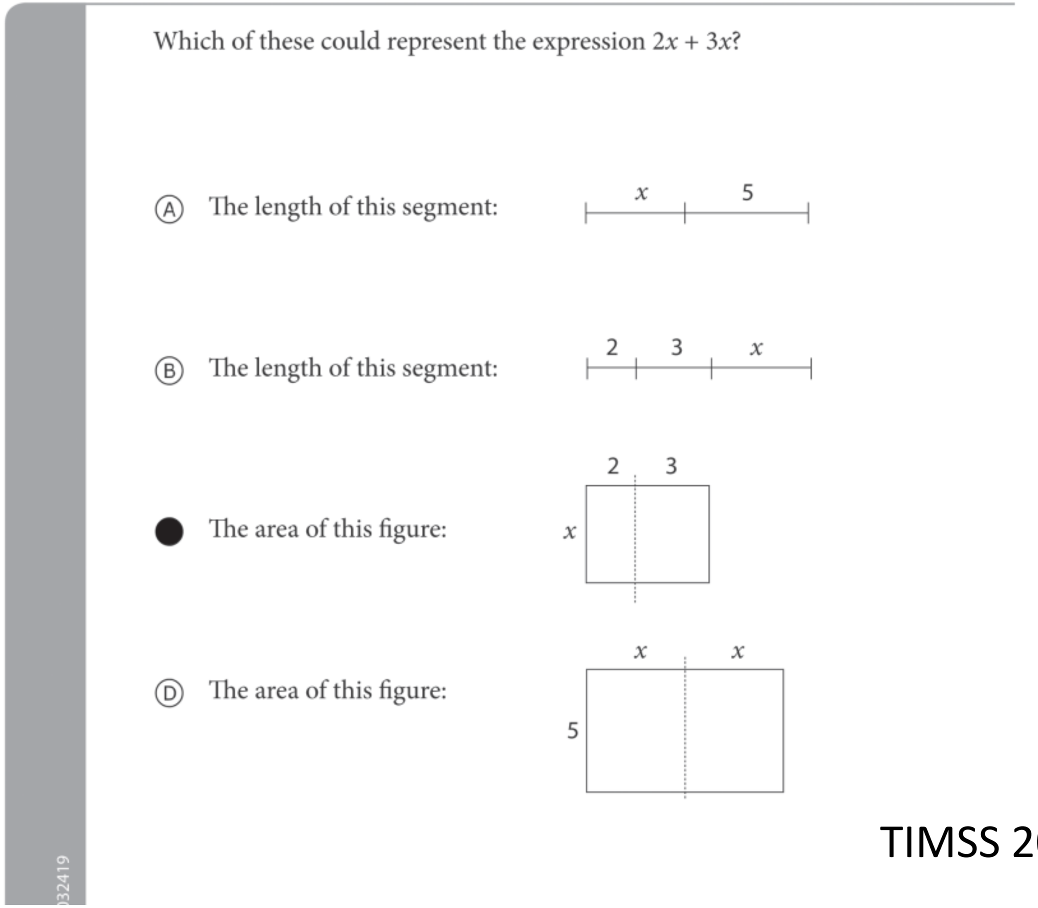
Ⓒ $K = B + p$

Ⓓ $K = (B + p) \cdot 4$

Vsebina: algebra – enačbe in neenačbe; kognitivno področje: uporaba znanja; pravilni odgovor: B.

Številka naloge	Oznaka naloge	Pravilni odgovor	Leto	A	B	C	D	Delno pravilni	Pravilni	Dekleta	Fantje
M042202	M01_08	B	2011	5,7	51,5	6,1	34	2,6	0,1	49,7	53,1
			2015	3,7	58,5	5,3	31,5	0,9	0,1	59,6	57,3

Kaj od naslednjega bi lahko predstavljal izraz 2x + 3x?


Which of these could represent the expression $2x + 3x$?

Ⓐ The length of this segment:

Ⓑ The length of this segment:

● The area of this figure:

Ⓓ The area of this figure:

TIMSS 2015

Kako razvijati/izboljšati znanje algebre pri vsakem učencu? (Splošni napotki)

- pomembno je razvijati **konceptualno razumevanje**
- vključevanje **strategij formativnega spremljanja** v vsaki fazi učnega procesa, predvsem je pomembno, da imajo učenci čim večkrat možnost za **ubeseditev lastnih miselnih procesov in strategij**.
- povezati je treba algebrske vsebine z drugimi vsebinami (**geometrija**)
- **vzorci** so primerna vsebina za razvijanje abstraktnega mišljenja in učenja algebrskih vsebin

- Za osmišljanje in poglobljeno razumevanje algebrskih struktur, ki presega le znanje vnaprej določenih procedur, Kindt (2018) usmerja **poučevanje in učenje algebre v aktiven način**, ki vključuje opisovanje številskih vzorcev, ugotavljanje zanimivih številskih lastnosti in reševanje praktičnih problemov.
- Prav tako Drijvers (2011) kot enega od pomembnih vidikov algebre izpostavlja **preiskovanje vzorcev**, kar vključuje opazovanje, prepoznavanje in ugotavljanje pravil ter odnosov med algebrskimi strukturami.

Kaj je poučevanje matematike s preiskovanjem?

Pristop k poučevanju matematike, ki omogoča učencem, da skozi lastno aktivnosti ozaveščajo že osvojeno matematično znanje ali pa izgrajujejo novo matematično znanje. (MERIA, Winsløw, C. idr. (2017)

Je na učenca osredinjena paradigma poučevanja matematike in naravoslovja, kjer učenci pri svojem delu posnemajo znanstvenike. Pri tem opazujejo pojave, zastavljajo vprašanja, izvajajo eksperimente, iščejo vzorce, postavljajo hipoteze, interpretirajo ugotovitve, prestavijo svoje rezultate in o njih razpravljajo.
(Encyclopedia of Mathematics Education)

- V najširšem smislu je preiskovanje proces, v katerem se učenec matematike uči skozi obravnavo problemskih situacij z nejasnimi cilji. Ni določeno, kaj mora ugotoviti in kako naj pride do ugotovitev.
- Reševalec se mora sam odločiti, kaj natančno bo preučil in kako bo to preučil.

(povzeto Magajna, Žakelj, 2000)

- Predstavitev osnutka UN -algebra

Kdaj uporabiti preiskovalni pristop?

Za preiskovalne naloge se lahko učitelj odloči v različnih fazah vzgojno-izobraževalnega procesa:

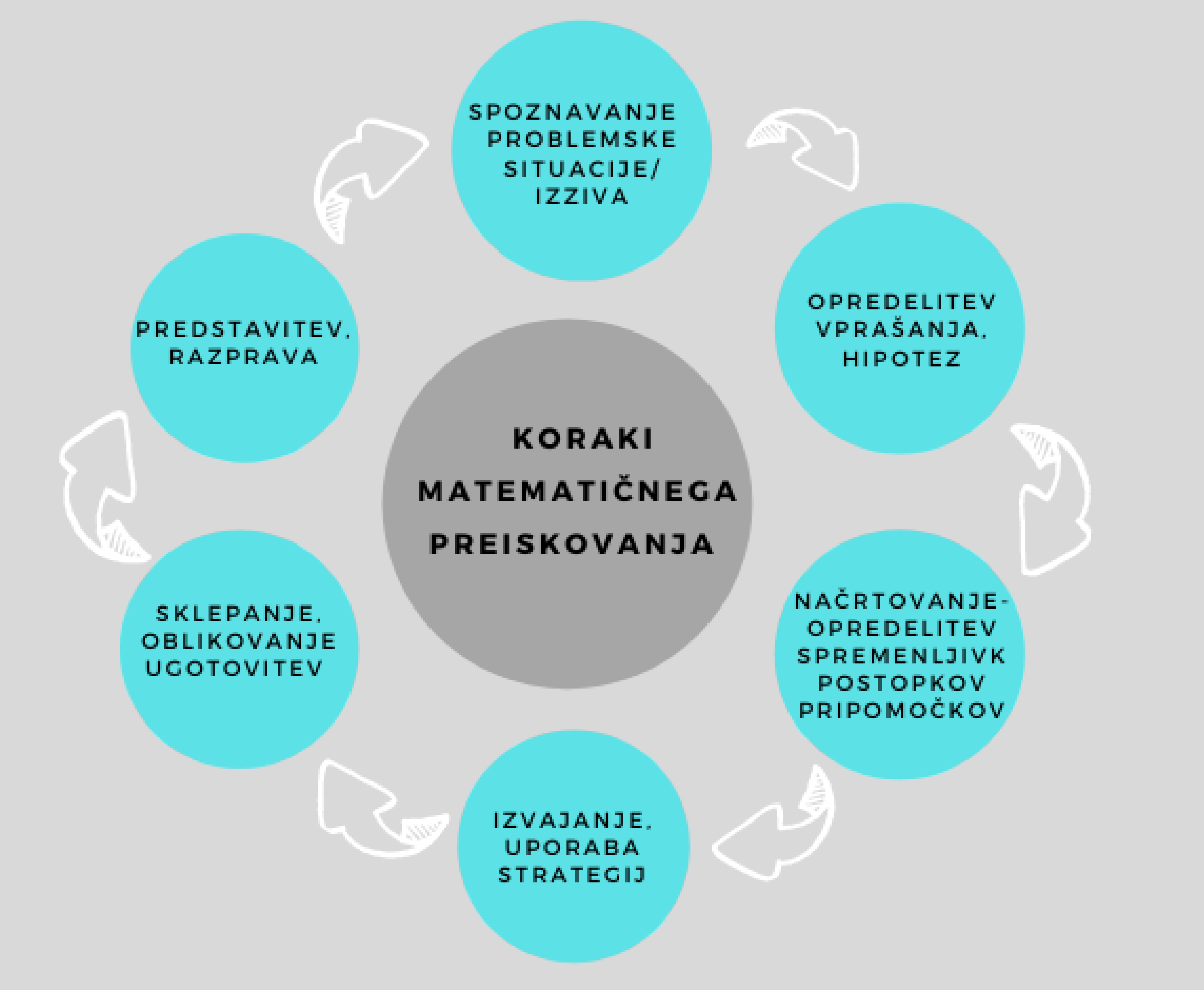
- pri ugotavljanju in aktivaciji predznanja,
- pri uvajanju v nov matematični pojme ali vsebino,
- pri utrjevanju in ponavljanju že naučenih vsebin,
- pri poglabljanju in širjenju že obravnavanih vsebin,
- pri ugotavljanju in vrednotenju znanja,
- pri povezovanju različnih (matematičnih) vsebin.

Učinki učenja in poučevanja matematike s preiskovanjem

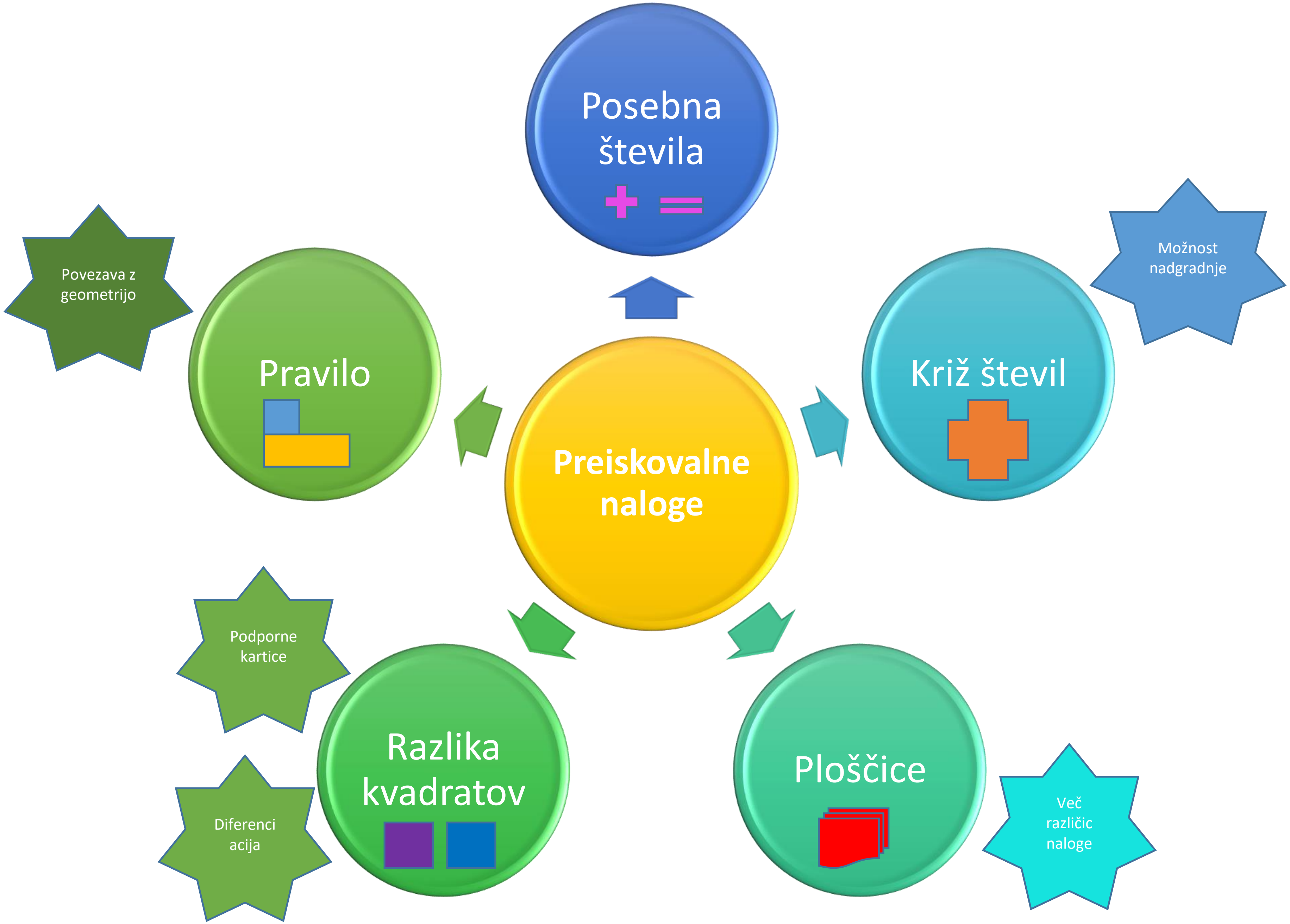
(Bašić, Milin Šipuš, KUPM 2018)

Znanstvene raziskave o učinkovitosti preiskovalnega pristopa temeljijo na meta-analizah, ki potrjujejo, da:

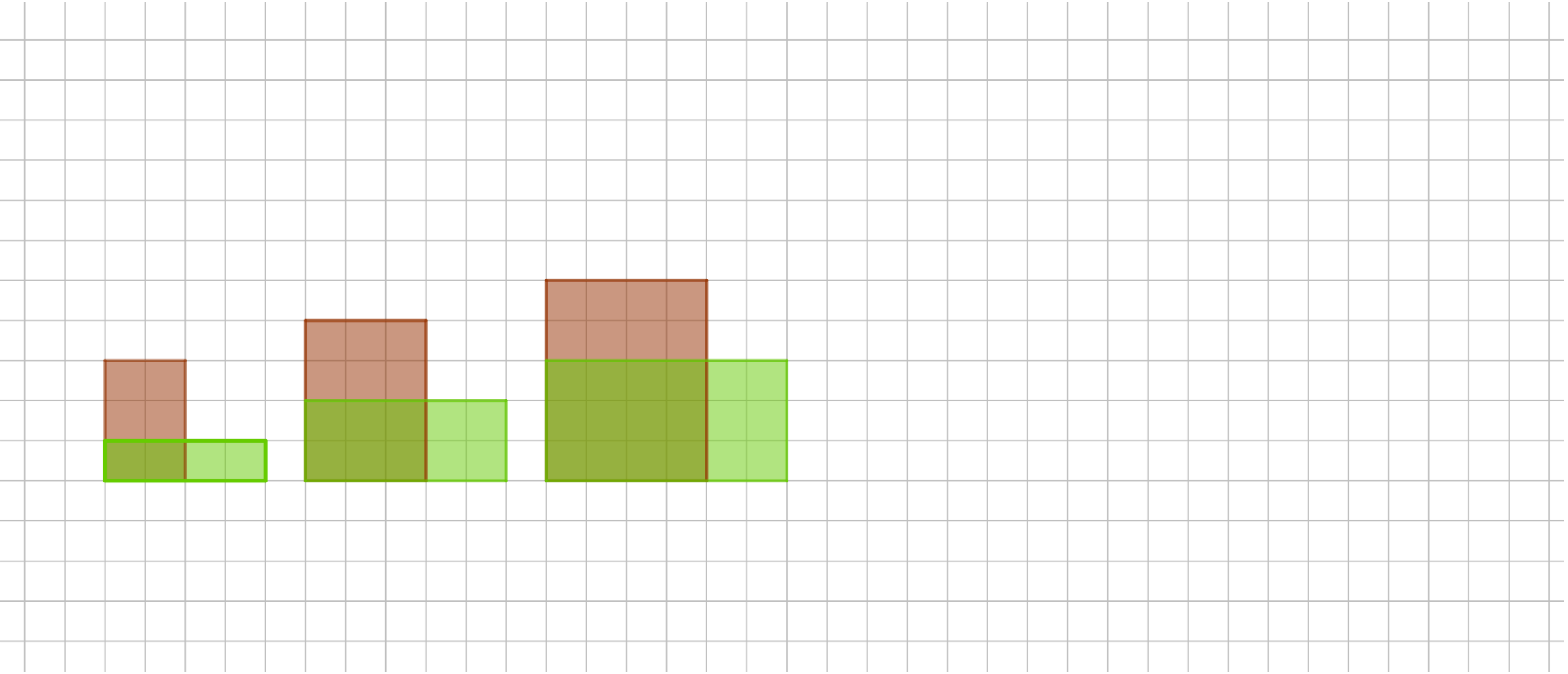
- imaju učenici ***večjo motivacijo in prepričanje***, da je matematika ***pomembna*** za življenje in delo (Bruder, Prescott, 2013)
- se izboljša sposobnost učenika za ***kritično mišljenje***, posebno pri učencih, ki prej niso bili spodbujeni k razmišljanju na tak način (Hattie, 2009)
- učenci govorijo o ***veselju do matematike,*** pri čemer so bili učenci iz tradicionalnih učilnic obremenjeni z nerazumevanjem (Boaler, 1998)
- študenti v terciarnem izobraževanju so ***raje vpisovali matematične predmete*** in so imeli raje predmete, ki vključujejo preiskovalni pristop (Kogan, Laursen, 2013)
- prisoten je pozitiven učinek na ocene u terciarnem izobraževanju
- obstaja pozitiven učinek glede na dekleta…


SPOZNAVANJE PROBLEMSKE SITUACIJE/ IZZIVA
OPREDELITEV VPRAŠANJA, HIPOTEZ
NAČRTOVANJE- OPREDELITEV SPREMENLJIVK POSTOPKOV PRIPOMOČKOV
IZVAJANJE, UPORABA STRATEGIJ
SKLEPANJE, OBLIKOVANJE UGOTOVITEV
PREDSTAVITEV, RAZPRAVA
KORAKI MATEMATIČNEGA PREISKOVANJA


SPOZNAVANJE PROBLEMSKE SITUACIJE/ IZZIVA
OPREDELITEV VPRAŠANJA, HIPOTEZ
NAČRTOVANJE- OPREDELITEV SPREMENLJIVK, NAČINA ZBIRANJA PODATKOV
ZBIRANJE PODATKOV, ANALIZIRANJE PODATKOV
OBLIKOVANJE UGOTOVITEV, INTERPRETACIJA REZULTATOV
PREDSTAVITEV, RAZPRAVA
KORAKI EMPIRIČNEGA PREISKOVANJA

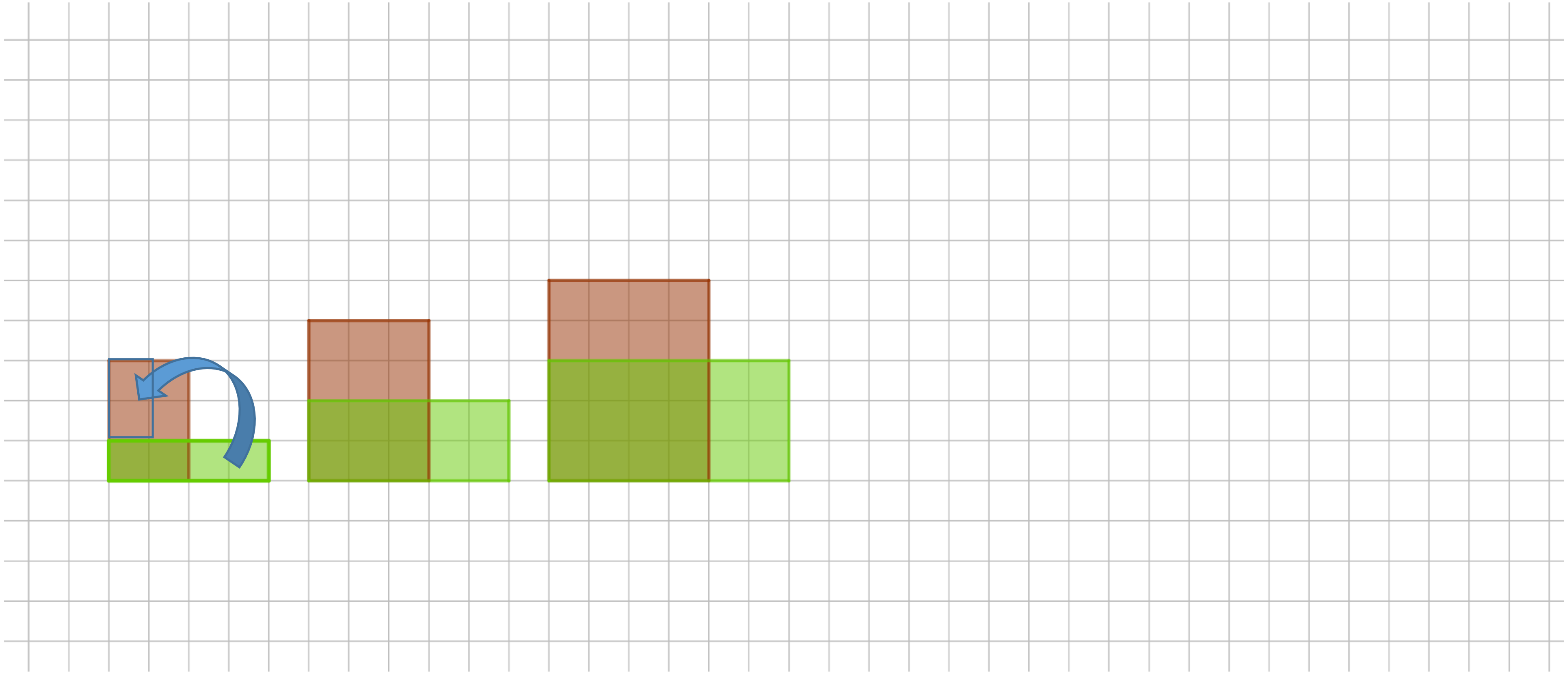

Posebna števila
Povezava z geometrijo
Pravilo
Preiskovalne naloge
Možnost nadgradnje
Križ števil
Podporne kartice
Diferenci acija
Razlika kvadratov
Ploščice
Več različic naloge

Raziščite, katero pravilo ponazarja vzorec.

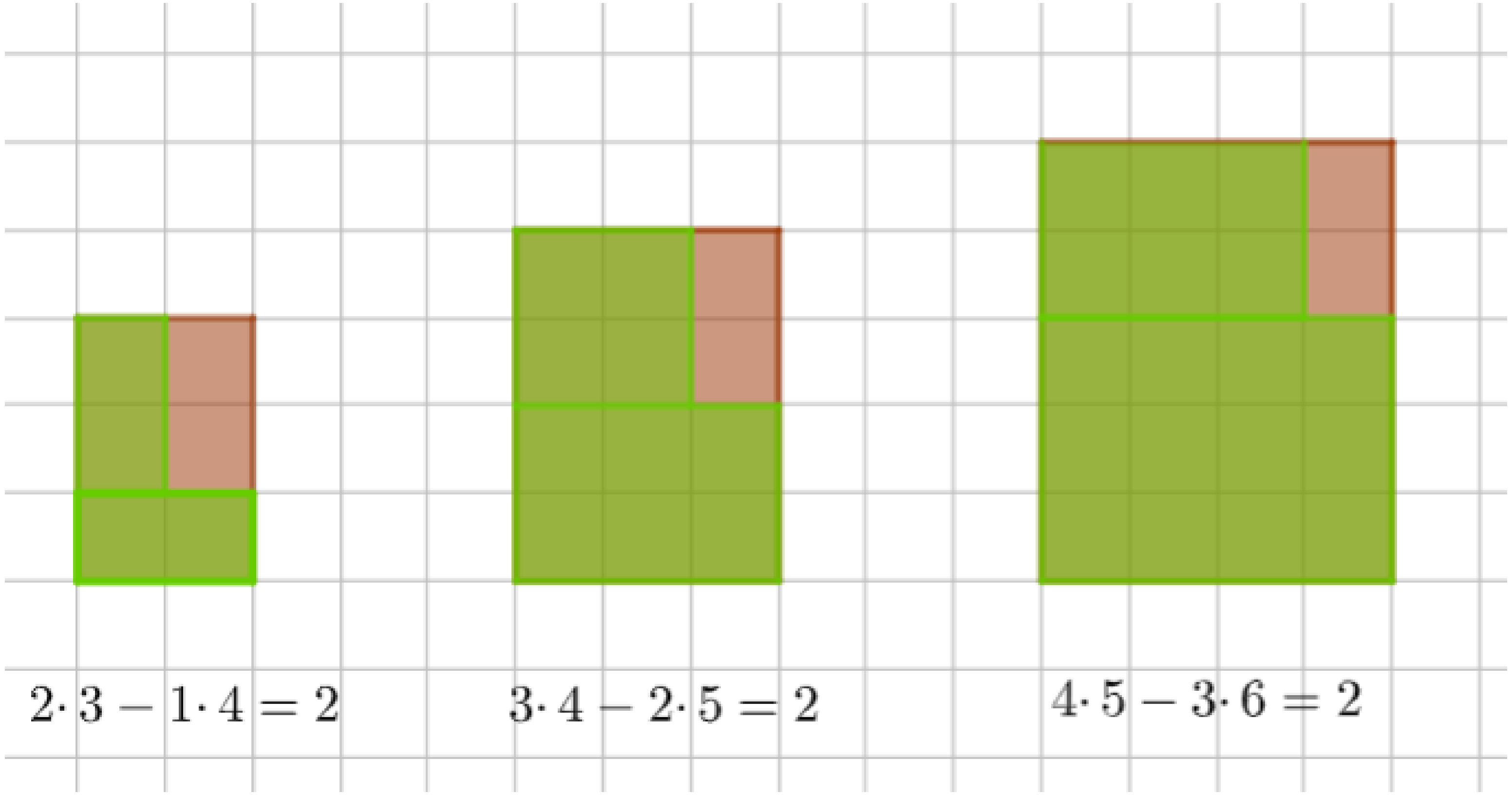


Namig 1

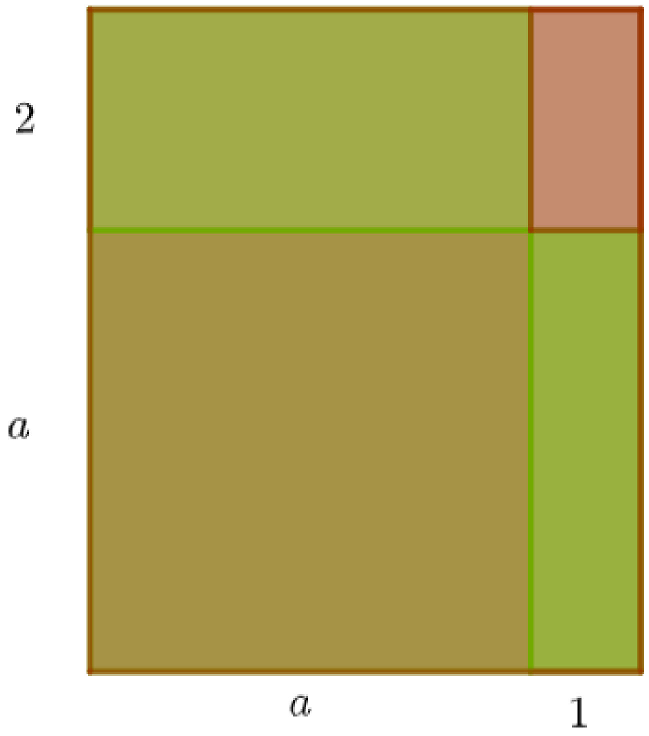
Raziščite, katero pravilo ponazarja vzorec.



Namig 2

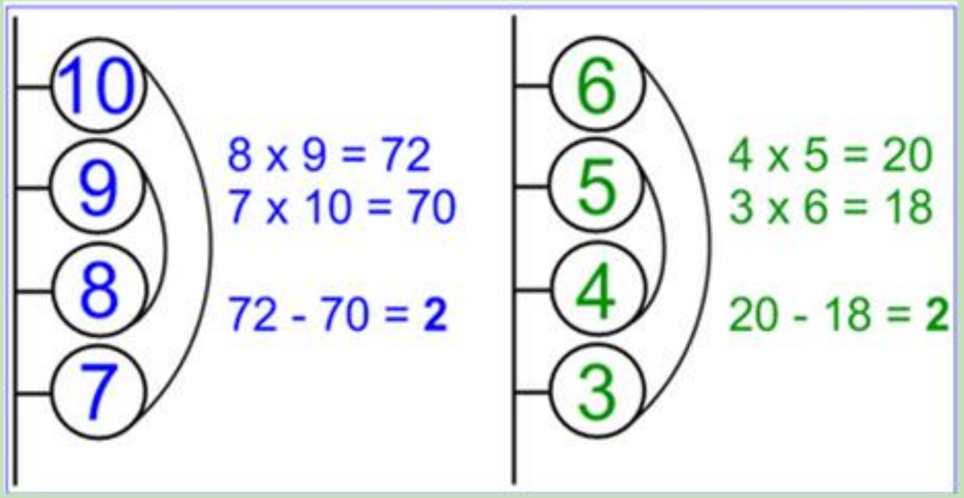


Za štiri zaporedna naravna števila velja:
razlika produkta srednjih dveh števil in produkta največjega in najmanjšega števila je vedno enaka 2.



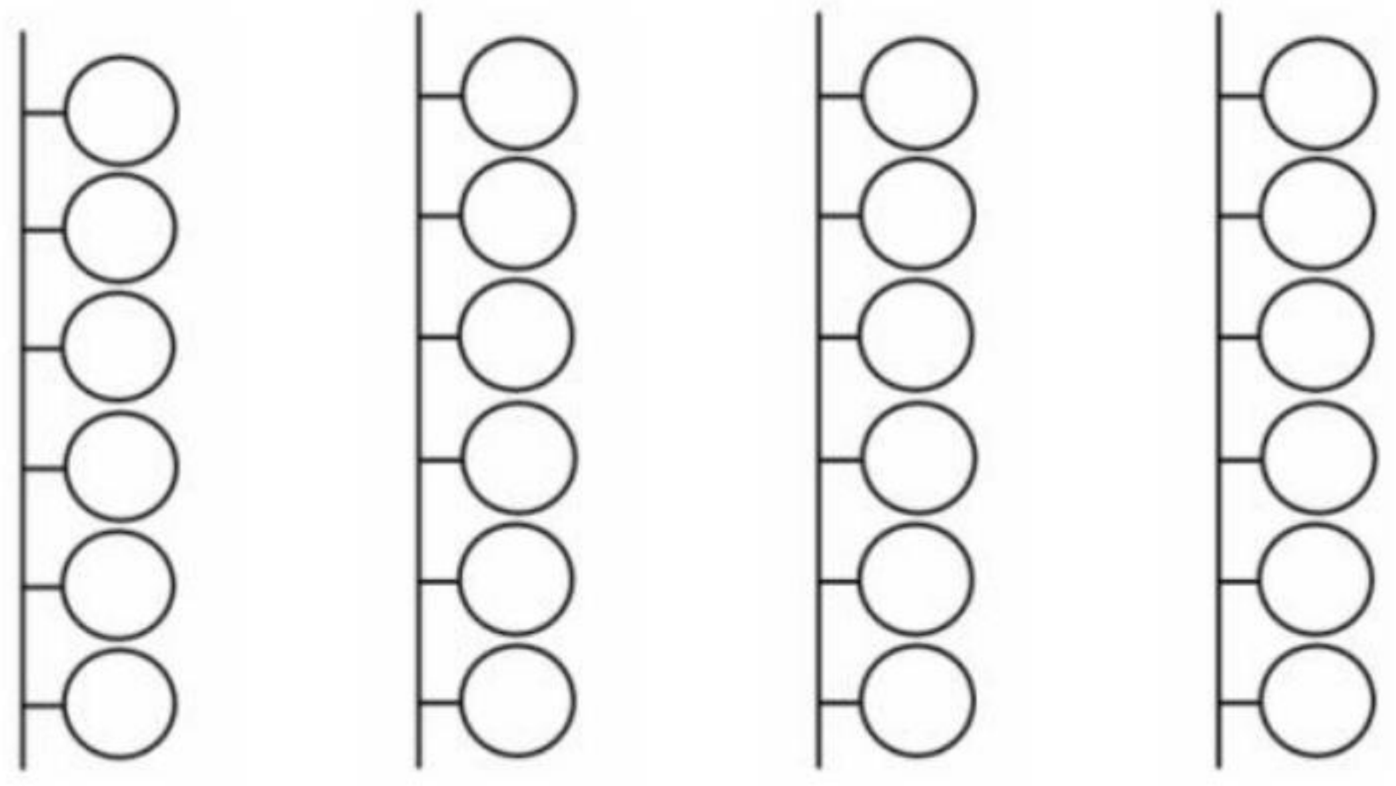
$$(a+1)(a+2) - a(a+3) = 2$$

Razišči



Kaj bi še lahko preiskoval?

Vir: [Inquiry Maths]



25 VPRAŠANJ

V PODPORO UČENCEM PRI PREISKOVANJU

Kaj bi se zgodilo, če bi….?

Kateri **vzorec** si opazil?

Katere so še **druge možnosti?**

Kako bi še lahko še ugotovil, ali so **koraki reševanja in tvoji odgovori ustrezni?**

Kaj vse si že poskusil? Katere korake si uporabil?

Ali bi problem lahko rešil **na drug način?**

Kaj si morda **spregledal?**

Kaj bi še **rad izvedel?**

Kakšna je bila tvoja **napoved** oz. **predvidevanje?**

Kako bi rešil **podoben, bolj preprost problem?**

Kaj bi še lahko preiskoval?

Kako bi problem razdelil na **podprobleme?**

Kje lahko najdeš **podatke**, ki jih potrebuješ?

Kako bi **preveril korake reševanja** ali rešitev?

Si že kdaj srečal **podoben problem?**

Kako si si **organiziral** informacije?

Kako bi pri reševanju uporabil **preglednico, seznam, diagram?**

Kako se **tvoje reševanje razlikuje od reševanja** sošolca? V čem mu je **podobno?**

Kako si **razmišljal o problemu?**

Ali bi problem lahko rešil z uporabo kakšnega **drugega modela?**

Kaj **ni delovalo?**

Kako **prepričan** si v svoj odgovor?

Ali je tvoja **rešitev smiselna** glede na kontekst?

Ali si delal po **kakšnem sistemu?** Razloži ga.

Kako tvoja rešitev ustreza začetnim pogojem?

Viri in literatura

- Winsløw, C. idr. (2017): *Priročnik MERIA za poučevanje matematike s preiskovanjem*
- Boss, R., idr. (2022): TIME^2, A compendium for designing inquiry-based mathematics education
- Boss, R., (2022): TIMELess, Professional development course on Lesson Study
- Lerman, S. (Ed.) (2020): Encyclopedia of Mathematics Education
- Mathematics B day https://www.uu.nl/en/education/mathematics-b-day/archive-of-assignments
- Drijvers, P. (2011). *Secondary Algebra Education Revisiting - Topics and Themes and Exploring the Unknown*. Sense Publishers.
- Kindt, M. (2018). Figured algebra. V M Suban (ur.), A. Jerko (ur.), *4. mednarodna konferenca o učenju in poučevanju matematike KUPM 2018, Zbornik razširjenih povzetkov*. Zavod Republike Slovenije za šolstvo.
- Jessen, B., Doorman, M., Bos, R., Bašić, M., Kokan, I., Špalj, E. (2017). *Priročnik MERIA za poučevanje matematike s preiskovanjem*. Zavod Republike Slovenije za šolstvo.
- Patterns and algebra: Year 8 MATHEMATICS CONCEPTUAL NARRATIVE Leading Learning: Making the Australian Curriculum work for us by bringing CONTENT and PROFICIENCIES together

Dodatna literatura

Ropohl, M., Rönnebeck, S., Bernholz, S., Köller, O. (2013): A definition of inquiry-based STM education and tools for meeasuring the degree of IBE. Report from the FP7 project ASSISTME: Assess Inquiry in Science, Technology and Mathematics Education

Schoenfeld, A. H., Kilpatrick, J. (2013): A US perspective on the implementation of inquiry-based learning in mathematics. ZDM Mathematics Education

Skvarč, M., Bačnik, A. (2011): Raziskovalno eksperimentalno učenje   kot imperativ sodobnega pouka naravoslovnih predmetov. Vzgoja in izobraževanje. l. XLII, št. 6, 2011, l. XLIII, št. 1, 2012, Zavod Republike Slovenije za šolstvo. Ljubljana

Suban, M. (2017): Učenje in poučevanje matematike s preiskovanjem. Vzgoja in izobraževanje, št. 4, 2017, l. XLVIII. Zavod Republike Slovenije za šolstvo. Ljubljana

Suban, M. (2018): Učenje in poučevanje matematike s preiskovanjem v luči sodobnih izzivov. KUPM 2018: zbornik razširjenih povzetkov (str. 26-28)

Suban, M. et al. (2013): Posodobitve pouka v osnovnošolski praksi. Matematika

Suban, M. et al. (2020): Ugotavljanje matematičnega znanja. Priročnik za učitelje. ZRSŠ. Ljubljana https://www.zrss.si/pdf/ugotavljanje_matematicnega_znanja.pdf

The PRIMAS project (2011): Promoting inquiry-based learning (IBL) in mathematics and science education across Europe: PRIMAS guide for professional development providers. Dosegljiv na www.primas-project.eu

Dodatna literatura

Artigue, M., Blomhøj, M. (2013): Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. ZDM Mathematics Education. 45: 797-810

Bačnik, A. (2017): Izobraževalni lističi Scientix NA-MA 2, dostopni https://skupnost.sio.si/course/view.php?id=9357

Herremans, A. (2012): Calculating Areas by Counting Nails. KUPM 2012. http://www.zrss.si/digitalnaknjiznica/KUPM%202012%20-%20Zbornik%20prispevkov/#/632/

Kmetič, S., Miholič, T., Zobec, V. (2014): Do višine trikotnika po več poteh. KUPM 2014. http://www.zrss.si/pdf/zbornik-prispevkov-kupm2014.pdf, str. 303

Lerman, S. (2014): Encyclopedia of Mathematics Education. Springer Dordrecht. Heidelberg. New York. London

MERIA Newsletter 1 http://www.meria-project.eu/news/first-issue-meria-newsletter

MERIA PRACTICAL GUIDE TO INQUIRY BASED MATHEMATICS TEACHING, dosegljivo na http://www.meria-project.eu/sites/default/files/2017-10/MERIA%20Practical%20Guide%20to%20IBMT.pdf

Pustavrh, S. (2012): Problemske naloge in opisno ocenjevanje. KUPM 2012, dosegljivo na http://www.zrss.si/digitalnaknjiznica/KUPM%202012%20-%20Zbornik%20prispevkov/#/256/

Rajh, S. (2016): Od Pascalovega do Leibnizovega trikotnika = From pascal's triangle to leibniz triangle, KUPM 2016 : zbornik razširjenih povzetkov (Str. 235-236)

Rajh, S. (2017): Pascalov aritmetični trikotnik, Leibnizev harmonični trikotnik, Matematika v šoli, Letn. 23, št. 2, 2017

Rajh, S. (2018): Od številskih vzorcev do algebre = From number patterns to algebra, KUPM 2018 : zbornik razširjenih povzetkov (Str. 191-193)

Rajh, S. (2018): Z žepnim računalom usvajamo nove vsebine pri pouku matematike v osnovni šoli, Matematika v šoli, Letn. 24, št. 1, 2018

Rajh, S. (2019): Uporaba žepnega računala pri preiskovanju številskih vzorcev, Matematika v šoli, Letn. 25, št. 1, 2019

Rajh, S. (2021): Razlika kvadratov, Matematika v šoli, Letn. 27, št. 2, 2021