

Poučevanje pisnega deljenja za algoritmično mišljenje

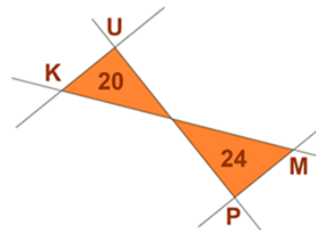
dr. Jasmina Ferme, dr. Barbara Arcet, dr. Alenka Lipovec

Pedagoška fakulteta, Univerza v Mariboru

Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Univerza v Mariboru

Laško, 11. in 12. november 2024

6. konferenca o učenju
in poučevanju matematike
KUPM 2024



ZRSŠ
ZAVOD
REPUBLIKE SLOVENIJE
ZA ŠOLSTVO



REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA VZGOJO IN IZOBRAŽEVANJE

I FEEL
SLOVENIA



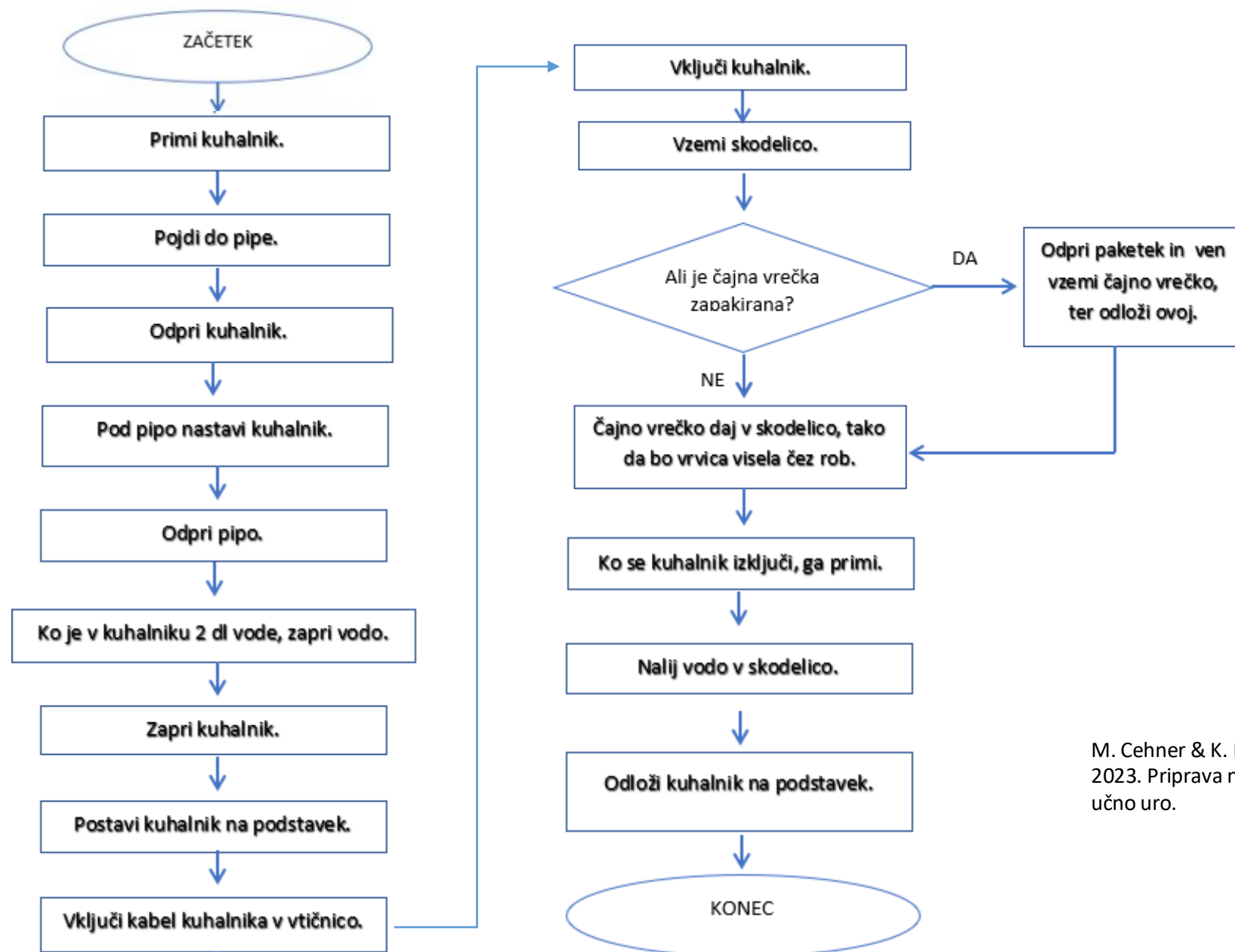
Sofinancira
Evropska unija

Koliko je $5316 : 78$?

Kako to izračunam ?

Kako ...

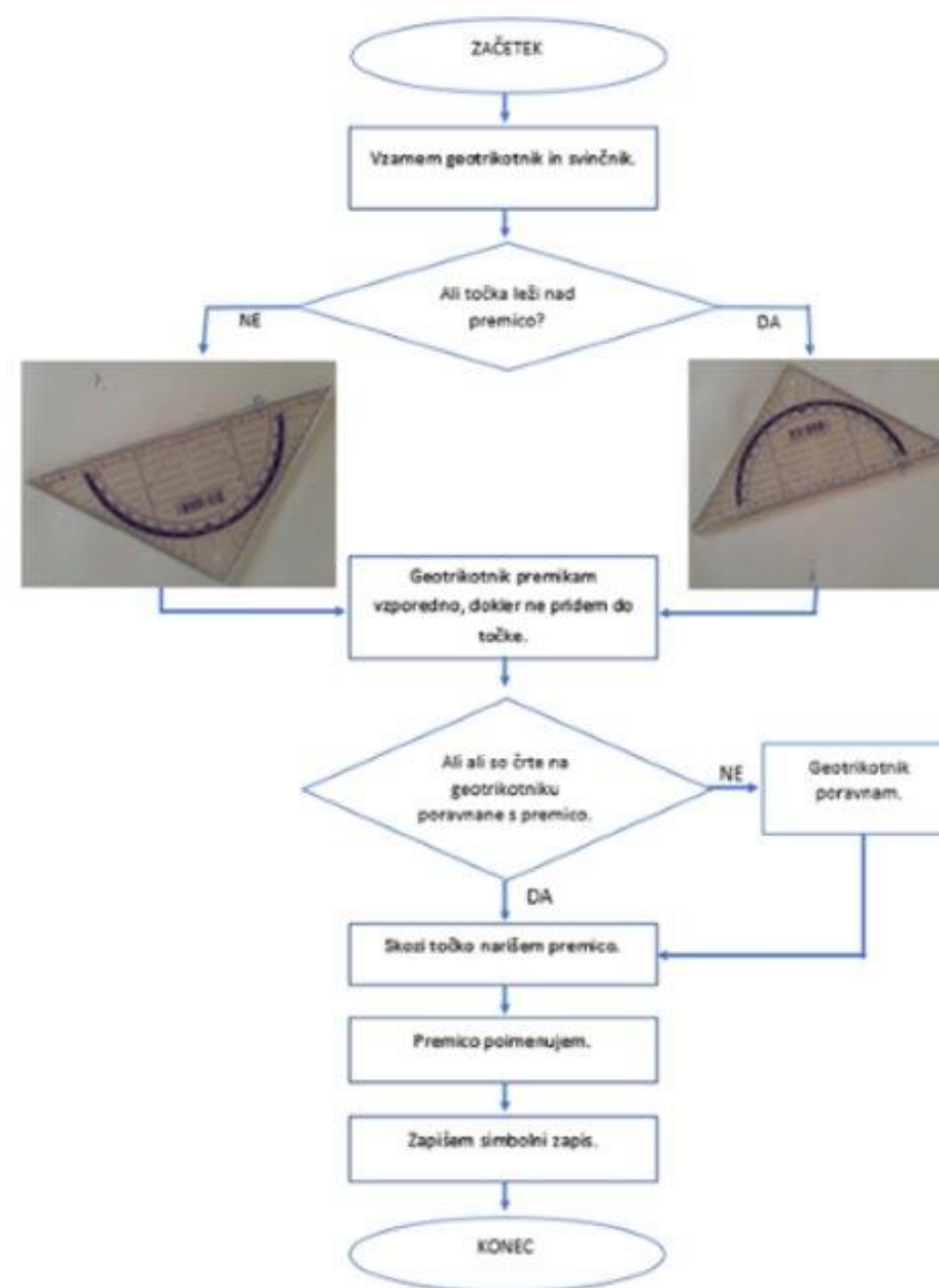
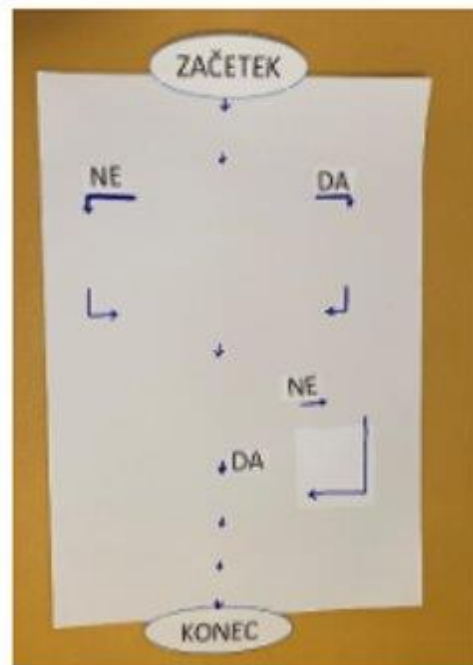
... skuhamo čaj?



M. Cehner & K. Frlež.
2023. Priprava na
učno uro.

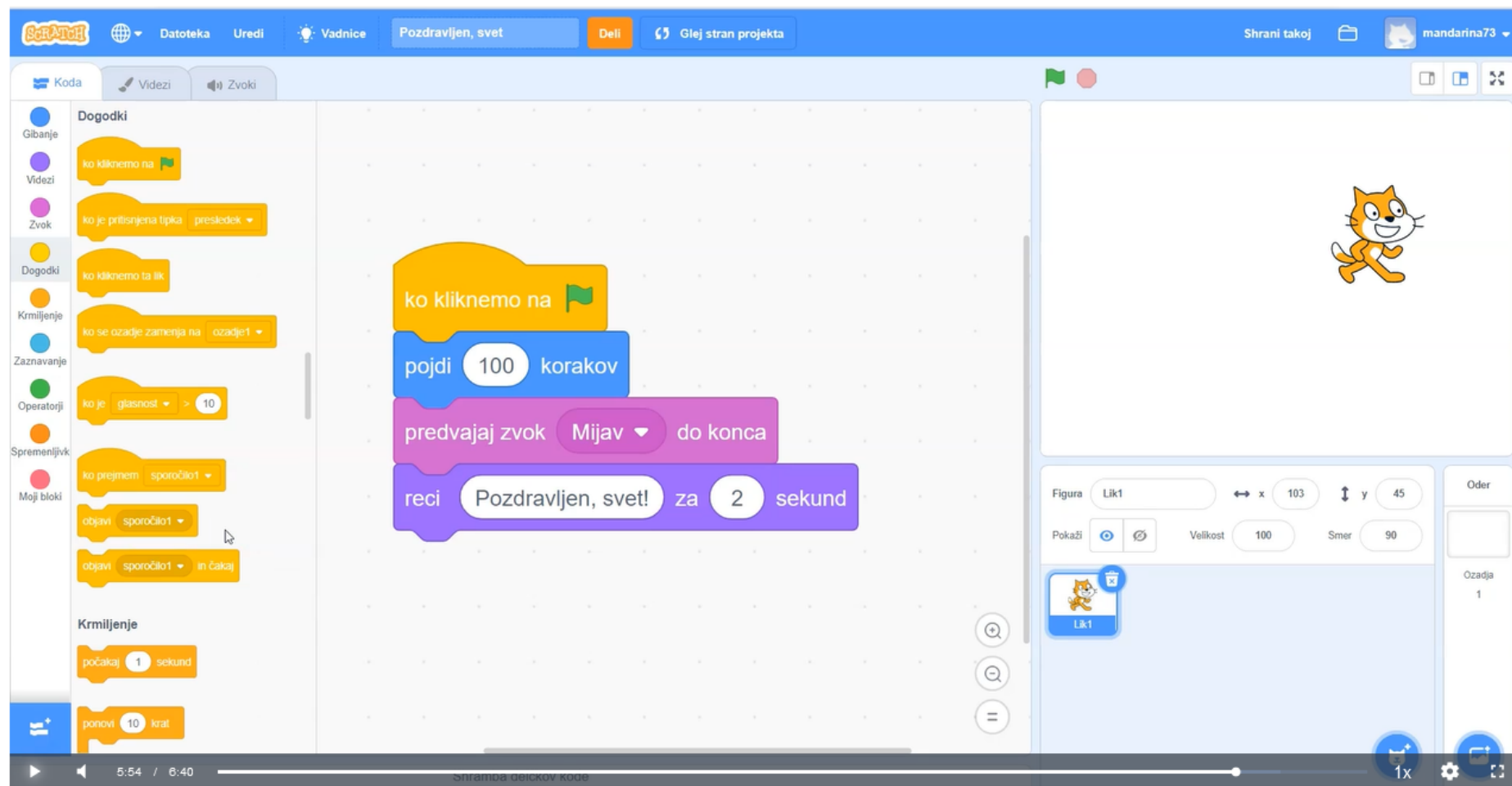
Kako ...

... narišem vzporednico k premici skozi dano točko?



M. Cehner & K. Frlež. 2023. Priprava na učno uro.

Scratch



Scratch - osnove

600 ogledov

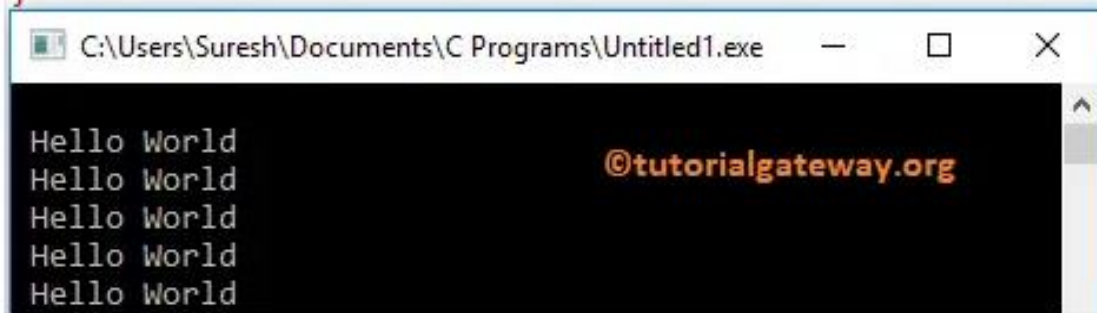
[Sonja Kepe](#) • objavljeno 05. 01. 2021 v [Računalništvo in informatika](#)

Vidnost Javen

Programska koda

```
/* Simple C Program to Print Hello World */
```

```
#include <stdio.h>
int main()
{
    int i;
    for (i = 1; i <= 5; i++)
    {
        printf("\n Hello World");
    }
    return 0;
}
```



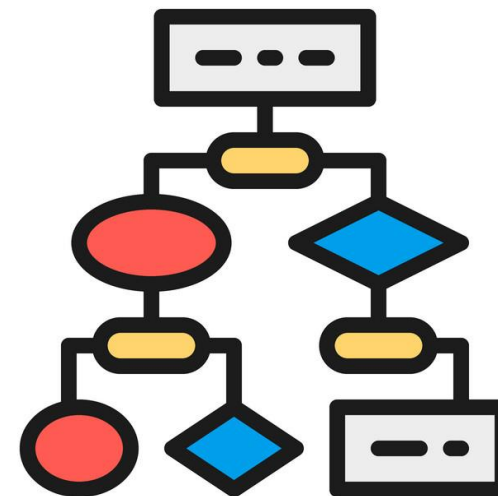
```
C:\Users\Suresh\Documents\C Programs\Untitled1.exe
Hello World
Hello World
Hello World
Hello World
Hello World
@tutorialgateway.org
```

```
9   const ServerProvider = ({
10     children,
11   }) => {
12     const dispatch = useDispatch();
13
14     const initialized = useSelector((state) => !!state.session.server);
15     const [error, setError] = useState(null);
16
17     useEffectAsync(async () => {
18       if (!error) {
19         try {
20           const response = await fetch('/api/server');
21           if (response.ok) {
22             dispatch(sessionActions.updateServer(await response.json()));
23           } else {
24             const message = await response.text();
25             throw Error(message || response.statusText);
26           }
27         } catch (error) {
28           setError(error.message);
29         }
30       }
31     }, [error]);
32
33     if (error) {
34       return (
35         <Alert
36           severity="error"
37           action={({
38             <IconButton color="inherit" size="small" onClick={() => setError(null)}>
39               <ReplayIcon fontSize="inherit" />
40             </IconButton>
41           })>
42         >
43           {error}
44         </Alert>
45       );
46     }
47   };
48 }
```

Algoritem

je natančno določen nabor navodil, ki se izvajajo v končnem številu korakov za reševanje določenega problema.

Baaquie, B.E., Kwek, LC. (2023). Classical Gates and Algorithms. V *Quantum Computers. Theory and Algorithms* (str. 37–69). Springer, Singapore.



... je tudi končni rezultat algoritmičnega mišljenja.

Računalniško mišljenje

1. Dekompozicija,
2. prepoznavanje vzorcev,
3. abstrakcija,
4. **algoritmično mišljenje.**

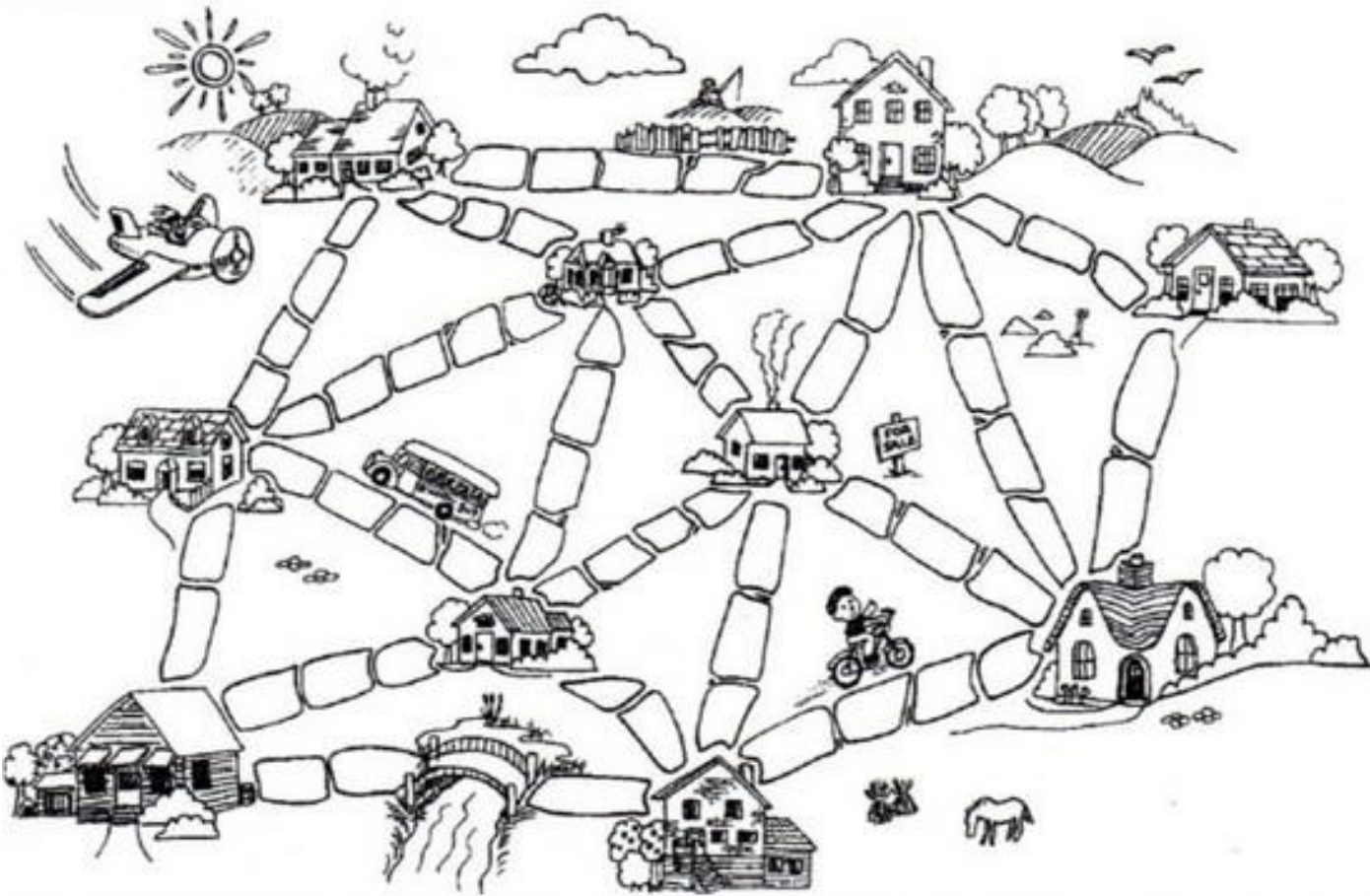


Skupna točka opredelitev: algoritmično razmišljanje se nanaša na kognitivne spretnosti, kot so

- dekompozicija oz. razčlenjevanje,
- abstrakcija,
- ustvarjanje algoritma, in
- odpravljanje napak.

Lehmann, T.H. (2024). How current perspectives on algorithmic thinking can be applied to students' engagement in algorithmatizing tasks. *Math Ed Res J* **36**, 609–643 (2024).

Blatno mesto



Asfaltirati želimo pot med hišami.

1. Od vsake hiše moramo priti do vsake druge hiše po asfaltu.
2. Želimo asfaltirati čim manj enot.


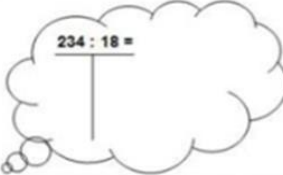

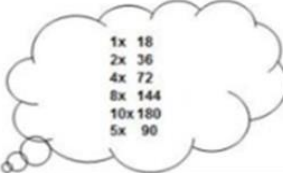

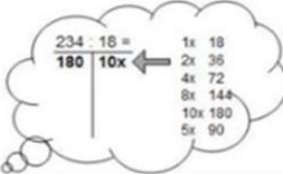

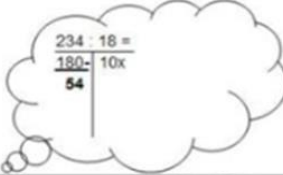

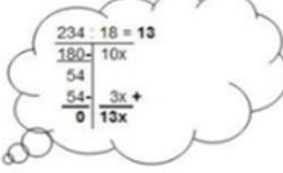
Razmislite o algoritmu.

Pisno deljenje

Računanje, ki temelji na posameznih števkih danih števil.

$$\begin{array}{r}
 \text{TSDE} \\
 8799 : 5 = 1759 \\
 \hline
 5 \\
 37 \\
 \hline
 35 \\
 \hline
 29 \\
 \hline
 25 \\
 \hline
 49 \\
 \hline
 45 \\
 \hline
 \text{ost. } 4
 \end{array}$$

	T	S	D	E
	1	2	3	4
+	1	2 ₁	6 ₁	6
	2	5	0	0

 ... : ... = T	 234 : 18 =
 1x ... 2x ... 4x ... 8x ... 10x ... 5x ...	 1x 18 2x 36 4x 72 8x 144 10x 180 5x 90
 ??? : ?? = ... : ... x ←	 234 : 18 = 180 10x ← 1x 18 2x 36 4x 72 8x 144 10x 180 5x 90
 ??? : ?? = ??? : ??x ...	 234 : 18 = 180 10x 54
 ??? : ?? = ... ??? : ??x ?? ?? : ?x + 0 ...x	 234 : 18 = 13 180 10x 54 54 - 3x + 0 13x

$$22 \cdot 9 = 10 \cdot 9 + 10 \cdot 9 + 2 \cdot 9$$

Računanje, kjer ni v ospredju obravnava posameznih števk števila.

Pisno deljenje

OSNOVNI POJMI

The image shows a handwritten long division problem on lined paper. The problem is $5316 : 78 = 68$. The dividend 5316 is enclosed in a blue box labeled "DELJENEC". The divisor 78 is enclosed in a blue box labeled "DELITELJ". The quotient 68 is underlined and enclosed in a red circle, with a label "DELNI KOLIČNIK" pointing to it. The first partial product 468 is enclosed in a yellow box, with a label "VMESNI PRODUKT" pointing to it. The final remainder 12 is followed by "ost.", with a label "VMESNI OSTANEK" pointing to it.

DELNI DELJENEC

DELJENEC

DELITELJ

DELNI KOLIČNIK

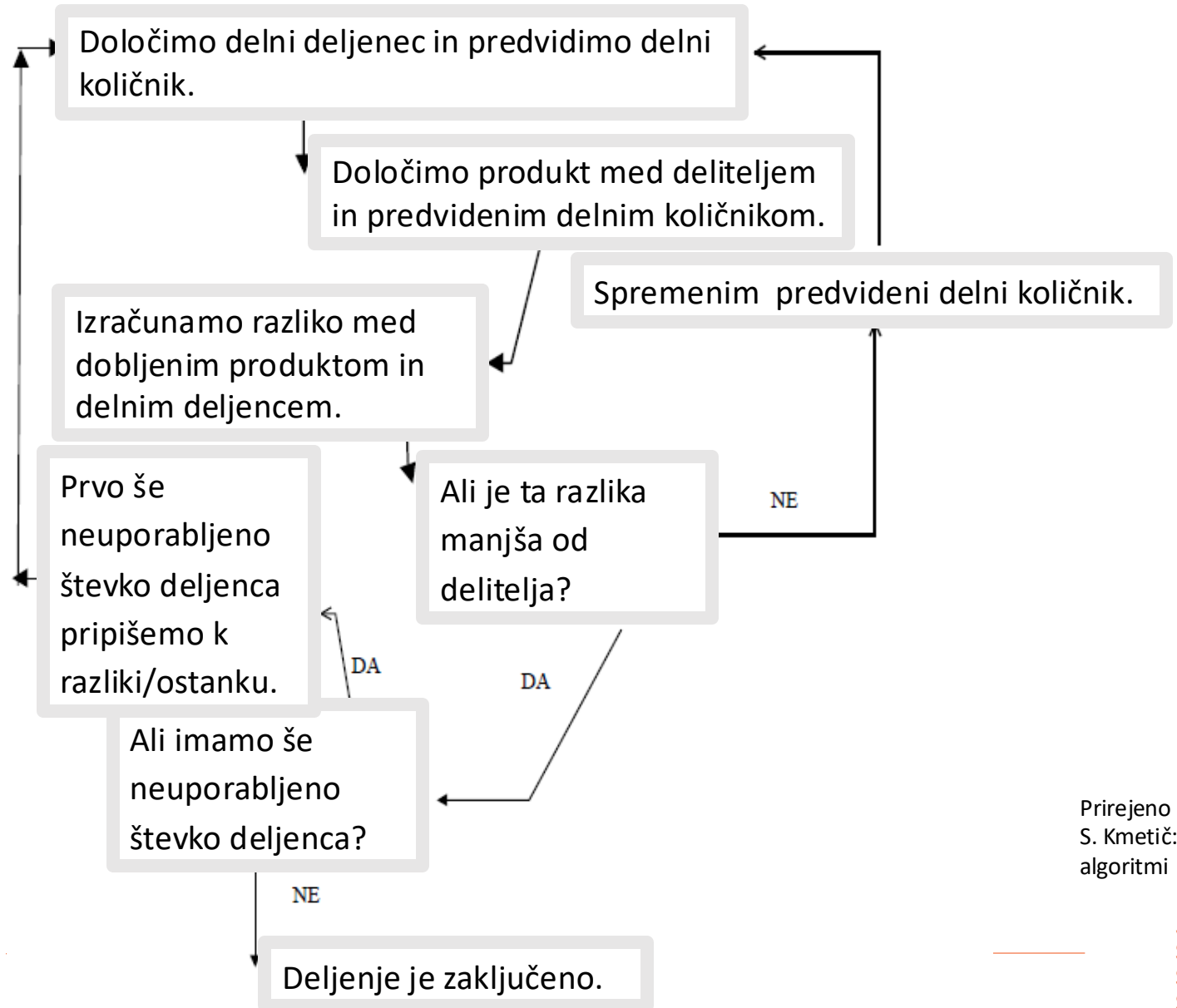
VMESNI PRODUKT

VMESNI OSTANEK

Pisno deljenje kot algoritem

Handwritten long division on lined paper:

$$\begin{array}{r} 5316 : 78 = \underline{\underline{68}} \\ - 468 \\ \hline 636 \\ - 624 \\ \hline 12 \text{ ost.} \end{array}$$



Prerejeno po
S. Kmetič: Računski
algoritmi

Pisno deljenje kot algoritem



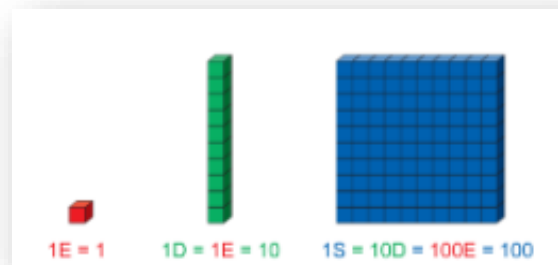
$$\begin{array}{r} 5316 : 78 = \underline{\underline{68}} \\ - 468 \\ \hline 636 \\ - 624 \\ \hline 12 \text{ ost.} \end{array}$$

1. Deljenje desetic danega števila s številom 78

$$531 : 78 = 6, \text{ ostane } 63$$

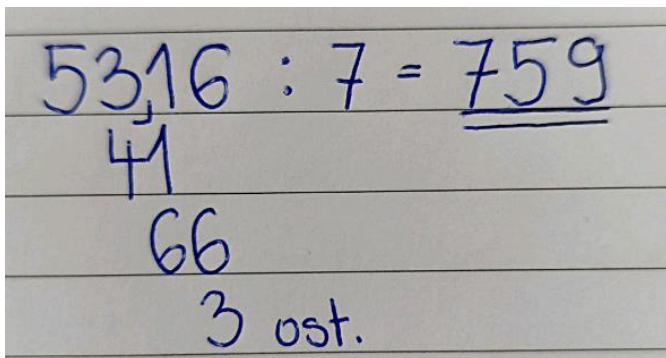
2. Deljenje preostalih enic s številom 78

$$636 : 78 = 8, \text{ ostane } 12$$



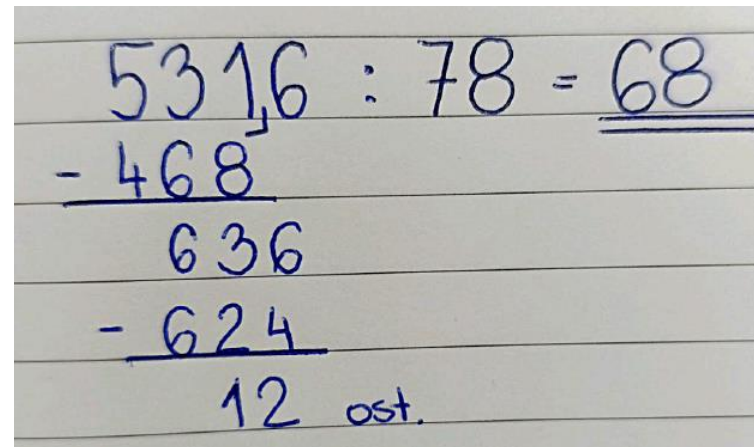
DIENESOVE
KOCKE

ENOMESTNI IN DVOMESTNI DELITELJ



Handwritten division of 5316 by 7 on lined paper. The quotient is 759 and the remainder is 3. The remainder is written as "3 ost." inside a box.

$$\begin{array}{r} 5316 : 7 = \underline{\underline{759}} \\ 41 \\ 66 \\ 3 \text{ ost.} \end{array}$$



Handwritten division of 5316 by 78 on lined paper. The quotient is 68 and the remainder is 12. The remainder is written as "12 ost." inside a box.

$$\begin{array}{r} 5316 : 78 = \underline{\underline{68}} \\ - 468 \\ 636 \\ - 624 \\ 12 \text{ ost.} \end{array}$$

Deljenje delnega deljenca z deliteljem
→ *deljenje z ostankom (v okviru poštevance)*

$$\begin{array}{r}
 531,6 : 78 = \underline{\underline{68}} \\
 - 468 \\
 \hline
 636 \\
 - 624 \\
 \hline
 12 \text{ ost.}
 \end{array}$$

DOLOČITEV DELNEGA DELJENCA

Katero število naj delim najprej?

Ali je $53 > 78$?

Ali je $531 > 78$?

DOLOČITEV DELNEGA KOLIČNIKA

Koliko je $531:78$?

Kako si lahko pomagam pri izračunu?

- $530:80 = ?$ - Zaokroževanje / ocenjevanje;
 $53:8 = ?$ - Poskušanje - zapis (nekaterih) večkratnikov števila 78 (pisno množenje, seštevanje, zakon o razčlenjevanju).

$$\begin{array}{l}
 1 \cdot 78 = 78 \\
 2 \cdot 78 = 156 \\
 4 \cdot 78 = 312 \\
 \begin{array}{l} 2+4 \\ 6 \cdot 78 = 468 \end{array}
 \end{array}$$



DOLOČITEV VMESNEGA OSTANKA

DALJŠI ZAPIS

Handwritten long division of 5316 by 78 on lined paper. The quotient is 68, which is underlined. The first step shows 5316 minus 468, resulting in 636. The second step shows 636 minus 624, resulting in 12 ost. (remainder).

$$\begin{array}{r} 5316 : 78 = \underline{\underline{68}} \\ - 468 \\ \hline 636 \\ - 624 \\ \hline 12 \text{ ost.} \end{array}$$

Preden določimo vmesni ostanek zapišemo vmesni produkt.

KRAJŠI ZAPIS

Handwritten short division of 5316 by 78 on lined paper. The quotient is 68, which is underlined. A small '4' is written above the 8. The remainder is 12 ost. (remainder).

$$\begin{array}{r} 4 \\ 5316 : 78 = \underline{\underline{68}} \\ 636 \\ 12 \text{ ost.} \end{array}$$

Preden določimo vmesni ostanek NE zapišemo vmesnega produkta.

Imamo dve možnosti:

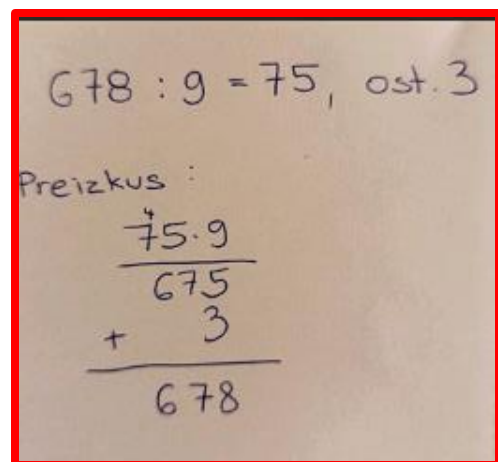
- 1) Vmesni produkt smo izračunali (pisno/mentalno).
- 2) Vmesnega produkta nismo izračunali.

OCENITEV REZULTATA PRED RAČUNANJEM

Približno koliko je $5316 : 78$?

Kako si pomagam?

PREIZKUS



Handwritten calculation on a piece of paper:

$$678 : 9 = 75, \text{ ost. } 3$$

Preizkus :

$$\begin{array}{r} 75 \cdot 9 \\ \hline 675 \\ + 3 \\ \hline 678 \end{array}$$

$$678 : 9 = 75, \text{ ostane } 3$$

PREIZKUS:

$$9 \cdot 75 + 3 = 675 + 3 = 678$$

Osnovni pojmi – Kaj pričakujemo od učencev?

The image shows a handwritten long division problem on lined paper. The calculation is $5316 : 78 = 68$ with a remainder of 12. The terms are annotated as follows:

- DELNI DELJENEC**: Points to the dividend 5316 .
- VMESNI PRODUKT**: Points to the intermediate products -468 and -624 .
- VMESNI OSTANEK**: Points to the remainder 12 .
- DELNI KOLIČNIK**: Points to the quotient 68 .

The handwritten work is as follows:

$$\begin{array}{r} 5316 : 78 = 68 \\ -468 \\ \hline 636 \\ -624 \\ \hline 12 \text{ ost.} \end{array}$$

Kako poučujemo / kaj pričakujemo?

Učni načrt ne predpiše načina!

- Deljenje z enomestnim deliteljem v 4.razredu?
- Deljenje z dvomestnim deliteljem v 5.razredu?
- Deljenje z dvomestnim deliteljem od 6.razreda naprej?

Join at [menti.com](https://www.menti.com) | use code **3845 2322**

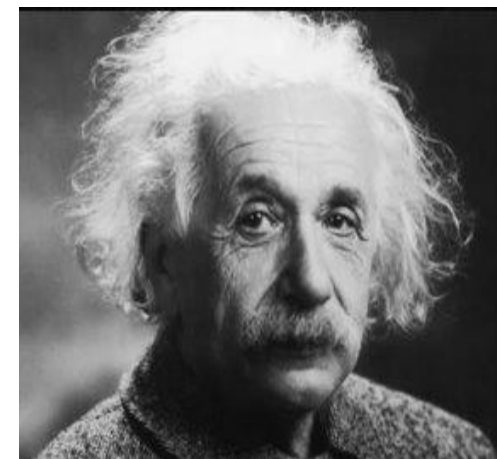
Raziskave

Enomestni delitelj:

- učenci, ki so spoznali samo kratki način - večja hitrost; učenci, ki so spoznali samo dolgi način - večja natančnost, (John, 1930, ZDA, 28 učencev 5.razred, retencijski testi)
- 75 % uporablja dolgi način, pri čemer je narejenih štirikrat manj napak kot pri kratkem načinu, (Olander in Preston Sharp, 1932 (ZDA, 1265 učencev, 4.-12.razred)
- izbor načina deljenja odvisen od poučevanega načina/učitelja. (Grossnickle, 1936 (ZDA, 200 učencev, 5.-15.razred)

Dvo-/tromestni delitelj:

- učenci, ki so spoznali samo dolgi način - večja hitrost in večja natančnost; učenci, ki so spoznali oba načina, ne glede na velikost delitelja uporabijo dolgi način. (John, 1930, ZDA, 28 učencev 5.razred, retencijski testi)



<https://www.thoughtco.com/1930s-timeline-1779950>

Raziskave

Večmestni delitelj: zelo kompleksno; raziskav zelo malo, prevladuje RME (Hickendorff, Fagingger Auer idr., 2008-2024)

Pomembnost izbire strategije – npr. 12012 : 12 vs. 3456 : 67.

Algoritmi, ki temeljijo na števkah: prevladujoča strategija v Španiji, Angliji, Belgiji, Turčiji, ZDA, Sloveniji ...; povečano število napak (Bathelt idr., 1986, Nemčija, 296 učencev, 4.razred); negativna povezava poučevanja na razvoj ostalih strategij (Schultz, 2018, Nemčija, 221 učencev, 4.razred); negativna povezava s številskimi predstavami (Schultz, Nemčija, 472 učencev, 4. in 5.razred); težave bodočih učiteljev (Kaasila idr. 2010, Finska; Fernández Verdú idr., 2014, Čile; Márquez idr., 2019; Ortiz-Laso, Diego-Mantecón, Španija, 2020)

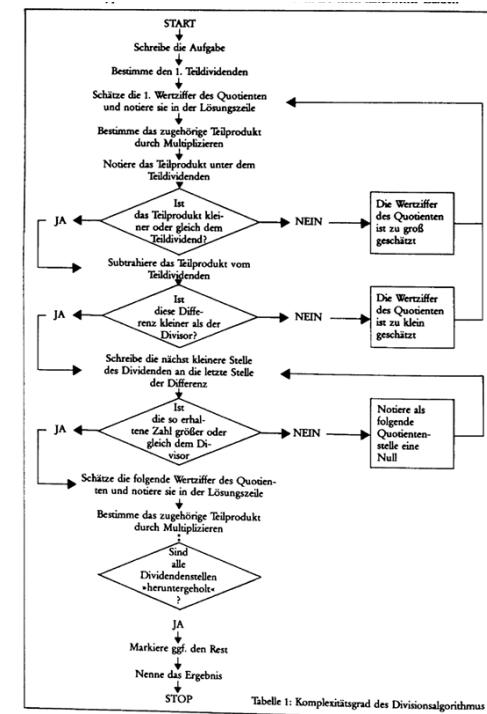


Tabelle 1: Komplexitätsgrad des Divisionsalgorithmus

Bathelt idr., 1986

Raziskave - SLO

Skvarča, 2019, pregled gradiv za 4 razred:

- prevladuje prikaz na kratki način, nekatera gradiva prikažejo oba načina, nobeno gradivo ne prikaže le dolgega načina. **Verjetno podobno za 5.razred.**
- "Učitelji se v 4.razredu največkrat odločijo za vpeljavo kratkega načina, tega priporočajo tako didaktiki kot razredni učitelji." - **ni vira. Kako je v 5.razredu?**



<https://etorba.sio.si/etorba/sl/home>

Povzetek

Z dvomestnim številom delimo tako, da rezultat najprej ocenimo, nato izvedemo pisni algoritem. Obvezno naredimo še preizkus.

$$\begin{array}{r} 2194 : 72 = 30 \\ 034 \end{array}$$

Ostane je 34.

$$\text{Ocena: } 2100 : 70 \hat{=} 30$$

$$\text{Preizkus: } \begin{array}{r} 72 \cdot 30 = 2160 \\ 2160 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2160 \\ + 34 \\ \hline 2194 \end{array}$$

Zgled

Eva je spodnji račun izračunala pravilno.

Handwritten calculation on a piece of paper: $275 : 19 = 12$. Below the division, the steps are written: $275 - 19 = 56$, $56 - 19 = 37$, $37 - 19 = 18$. The final result is written as "12 OSTANEK 18".

Drži.

Ne drži.

Preveri

Raziskave - SLO

Jamšek, 2011 (16 petošolcev, večmestni delitelj)

- ne potrdi hipoteze, da slabši učenci izbirajo daljši način.
- klasifikacija napak (npr. opustitev številke, zamenjava številke...)

č) $68068 : 53 =$

d) $498074 : 63 =$

$$\begin{array}{r} 68068 : 53 = 11 \\ -53 \\ \hline 50 \\ -53 \\ \hline 976 \end{array}$$

Pri odštevanju $68 - 53 = \underline{\quad}$, je učenec pri rezultatu opustil skrajno levo številko 1.

Polutnik, 2017 (17 petošolcev, večmestni delitelj)

- če učenci lahko izbirajo, izberejo daljši način (14/17),
- pri daljšem načinu naredijo za polovico manj napak (krajši način 42 %, daljši način 66 %),
- ni klasifikacije napak.

Izračunaj in napravi preizkus. Lahko deliš na kratek ali daljši način.

a) $4589 : 20 =$

b) $1215 : 27 =$

c) $34067 : 23 =$

d) $1890607 : 44 =$

Torej: dolgi način za dvomestni deljenec in kratki način
le kot "bližnjica" s preprostimi delitelji / za boljše
učence?

Morda ne, ker:

- ulomki / decimalke,
- krajšanje ulomkov,
- ...

$$\frac{44}{121} = \frac{4}{11}$$

Ampak morda vseeno, ker

$$\begin{array}{r} - \left\{ \begin{array}{l} (x^4 - 2x^2 + a) : (x^2 + 1) = x^2 - 3 \\ x^4 + x^2 \end{array} \right. \quad \text{KOLIČNIK} \\ \hline - \left\{ \begin{array}{l} -3x^2 + a \\ -3x^2 - 3 \end{array} \right. \\ \hline \quad \quad \quad a + 3 \\ \quad \quad \quad \text{OSTANEK} \end{array}$$

Zaključek



Chat GPT 4o

Učiteljica
matematike sem.

Seveda imam
probleme!