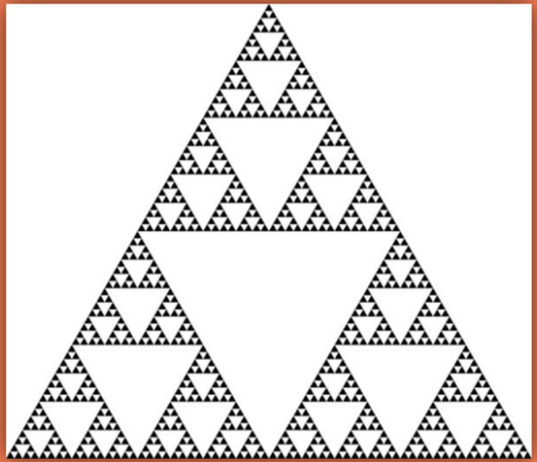
Od fraktalov do platonskih teles

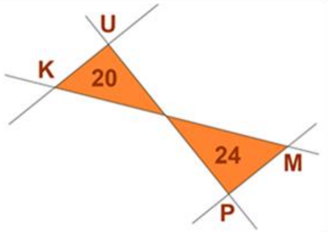


Nina Budna

Osnovna šola Mozirje

Laško, 11. in 12. november 2024

6. konferenca o učenju
in poučevanju matematike
KUPM 2024



ZAVOD REPUBLIKE SLOVENIJE ZA ŠOLSTVO

REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA VZGOJO IN IZOBRAŽEVANJE

I FEEL SLOVENIA

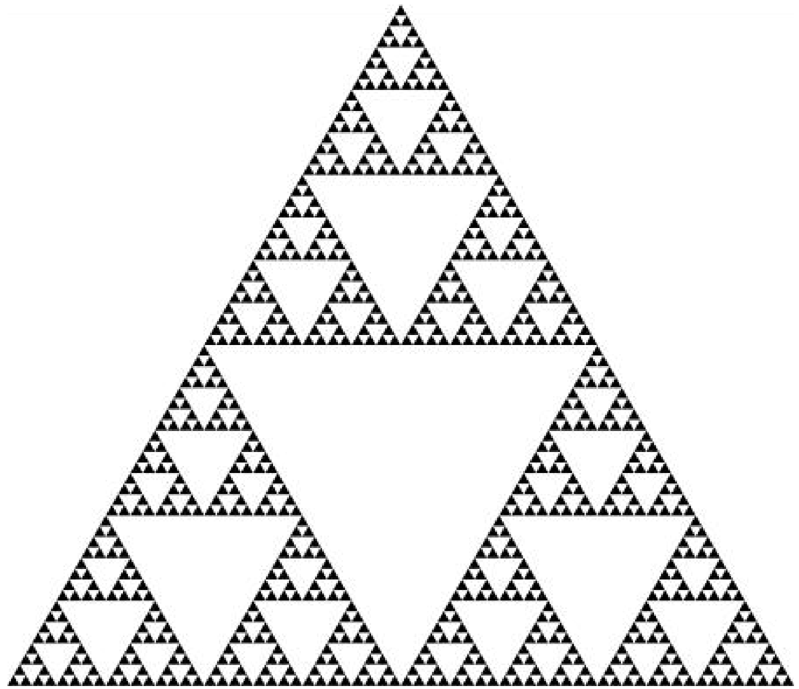
Sofinancira Evropska unija

Učni načrt – Matematična delavnica (9. razred)

SKLOP: FRAKTALI		
• Prepoznati samopodobnost likov (fraktalov), • izdelati zaporedje oblik, ki vodijo v fraktal, • v zaporedjih prepoznati 'konvergentnost', 'periodičnost', 'kaotičnost', • poznati zglede fraktalnih oblik v naravi.	Samopodobnost lika. Primeri preprostih fraktalov (Kochova snežinka, zmajeva krivulja). Zanimiva iterativno podana zaporedja (npr. $X \to X^2 + C$, pri različnih parametrih C). Izdelava slik fraktalov z računalnikom.	Za dosego večine ciljev je primerno preiskovalno delo. Glede razumevanja smo pozorni predvsem na pojme samopodobnosti in kaotičnosti. Pojme 'konvergentnosti', 'periodičnosti' in 'kaotičnosti' obravnavamo zgolj intuitivno, ob zgledih. Pri delu si učenci lahko pomembno pomagajo z žepnimi računali in primernimi računalniškimi programi.

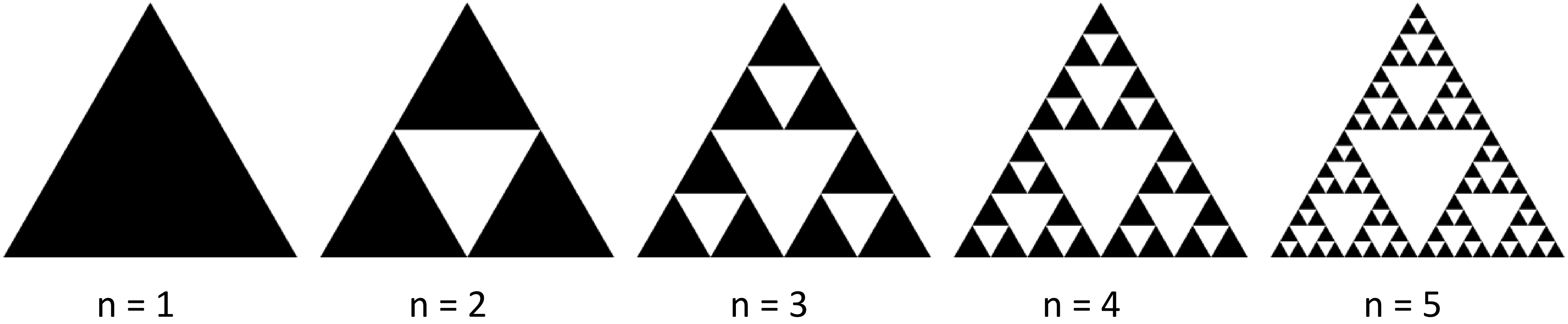
Trikotnik Sierpinskega

- Trikotnik Sierpinskega je fraktal, ki je razdeljen na manjše enakostranične trikotnike. Je matematično ustvarjen vzorec.
- poljski matematik Wacławu Sierpińskemu (1882 – 1969)
- okrasni vzorec



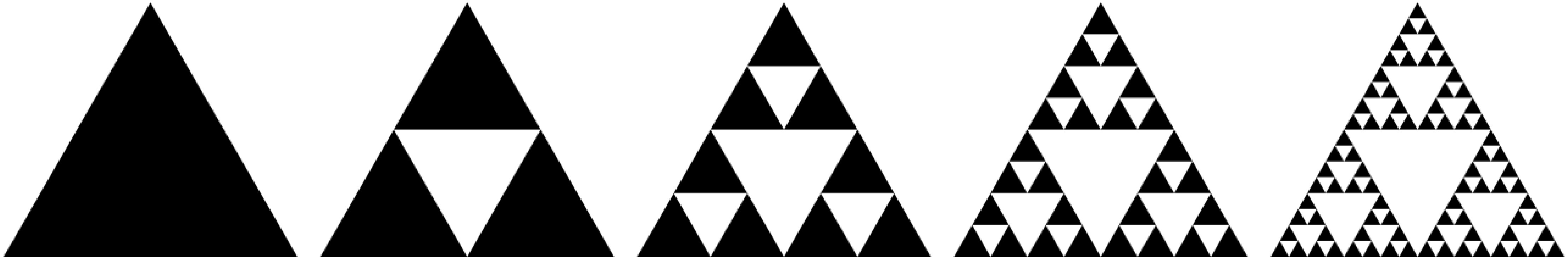
Konstrukcija trikotnika Sierpinskega

- Za izhodišče narišemo enakostranični trikotnik.
- Povežemo razpolovišča stranic. Tako razdelimo prvotni trikotnik na 4 skladne trikotnike.
- Odstranimo srednji trikotnik. Ostali trikotniki ostanejo.
- Nadaljujemo z algoritmom.



- Nadgradnja: razmerje obsegov, razmerje ploščin
- Kolikšen je obseg v neskončnosti? Kolikšna je ploščina v neskončnosti?

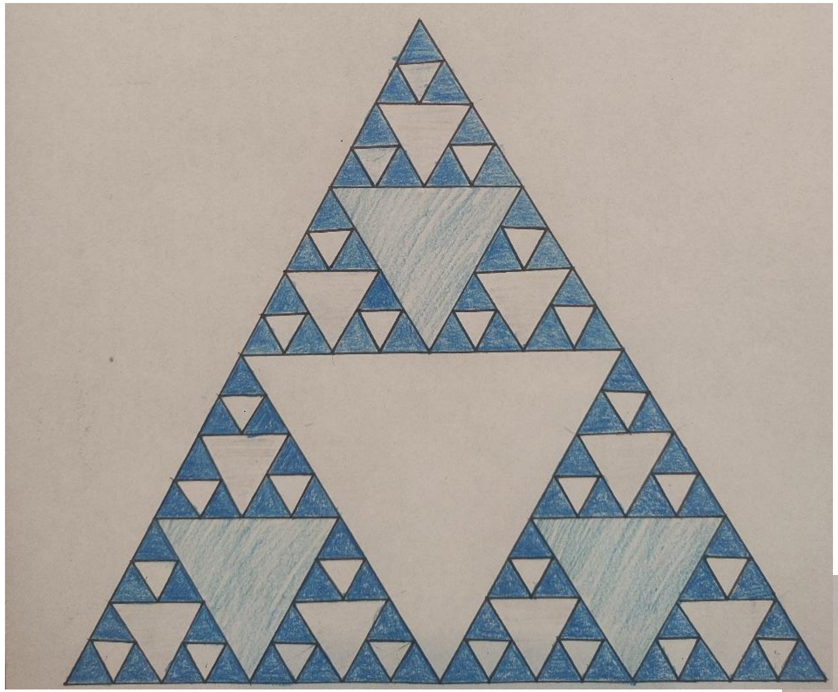
Število črnih trikotnikov, ki nastanejo pri delitvi

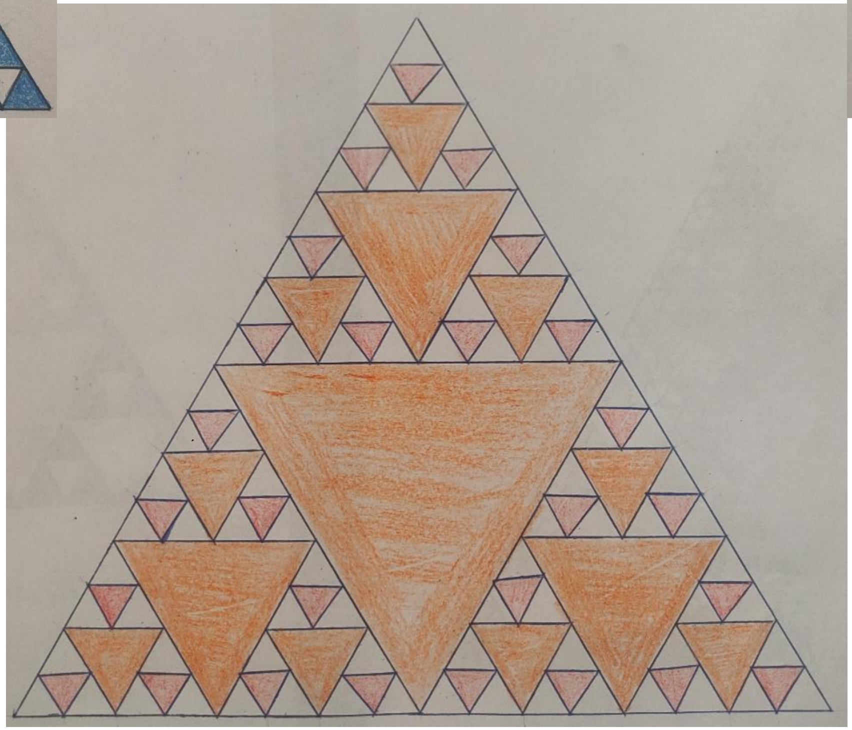


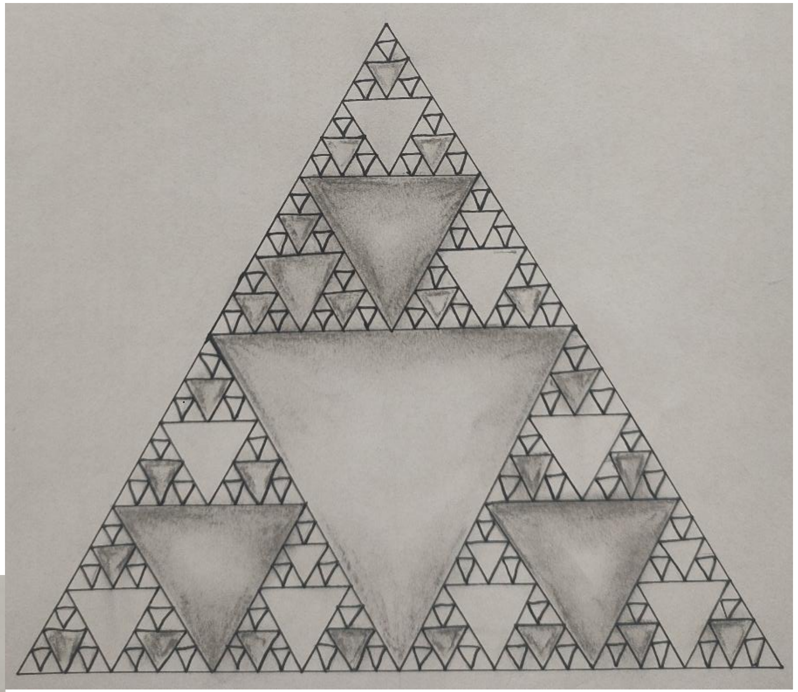
n = 1 n = 2 n = 3 n = 4 n = 5

$3^{1-1} = 1$ $3^{2-1} = 3$ $3^{3-1} = 9$ $3^{4-1} = 27$ $3^{5-1} = 81$

$$3^{n-1}$$



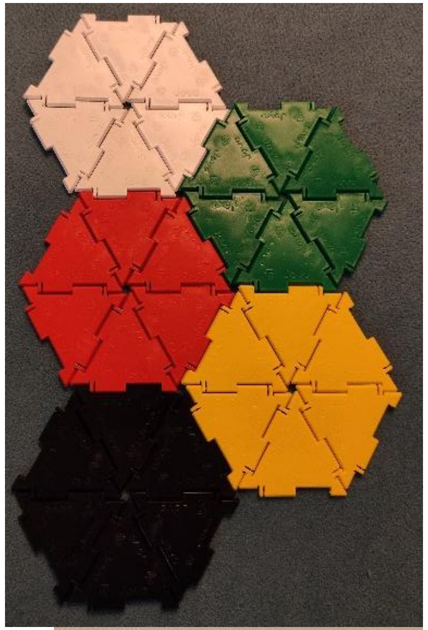




Učni načrt – Matematična delavnica (9. razred)

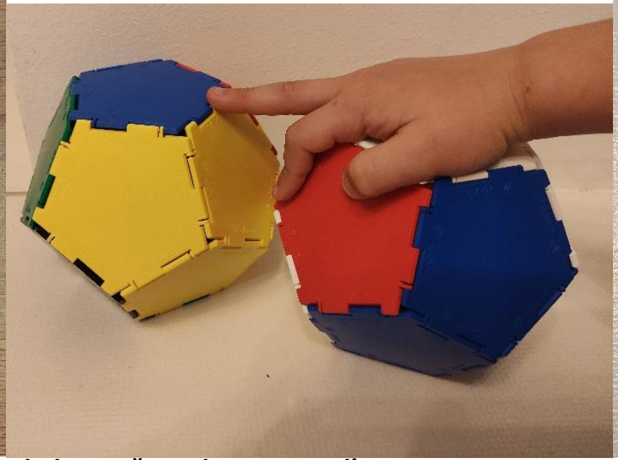
SKLOP: TELESA IN PROSTOR		
• Prepoznati in poimenovati pravilna telesa, • ob modelu opisati zahtevnejša telesa (npr. pravilna, arhimedska telesa), • ob modelu izdelati mrežo zahtevnejših teles, • primerjati lastnosti mreže z lastnostmi teles (npr. ugotoviti, da iz dane mreže ni mogoče sestaviti danega telesa).	Pravilna telesa: tetraeder, kocka, oktaeder, dodekaeder, ikozaeder. Arhimedska telesa. Izdelava modelov različnih vrst. Sestavljivost modelov z dano mrežo. Risbe na površinah teles. Nemogoči predmeti. Stereogrami.	Poudarek je na razvijanju opazovanja in prostorske predstavljivosti. Po presoji učitelj lahko usmeri pouk tudi v tehniko izdelave teles, imaginacijo ali geometrijska razglabljanja. Pri izdelavi in preučevanju modelov teles uporabljamo običajne materiale (papir, lepenka, les, pena) ali namenske didaktične sestavljenke. Poleg tega lahko uporabljamo tudi dostopne računalniške programe za prostorsko predstavitev teles in njihovih mrež ter programe za izdelavo stereogramov.

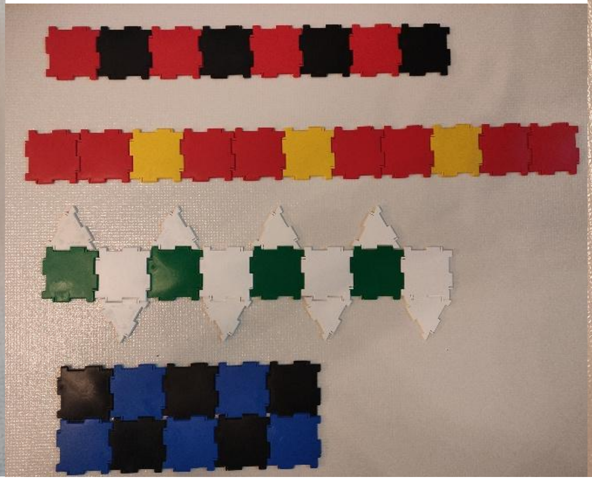
Tetraeder Sierpinskega - ideja

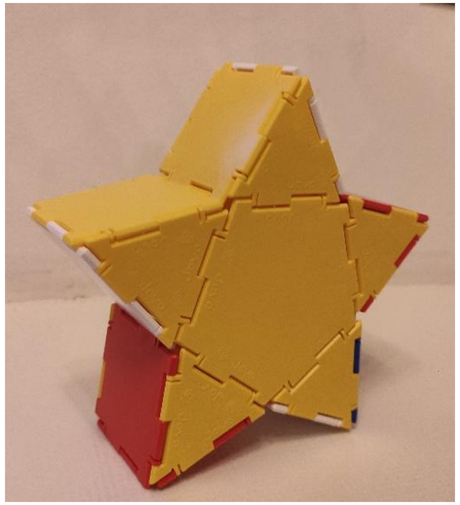


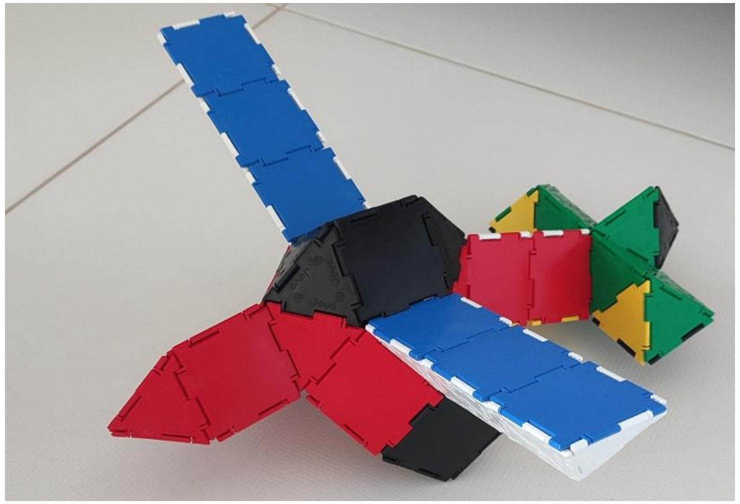
- Prof. dr. Izidor Hafner - Sistem Jovo
- 5. konferenca o učenju in poučevanju matematike (KUPM 2022)

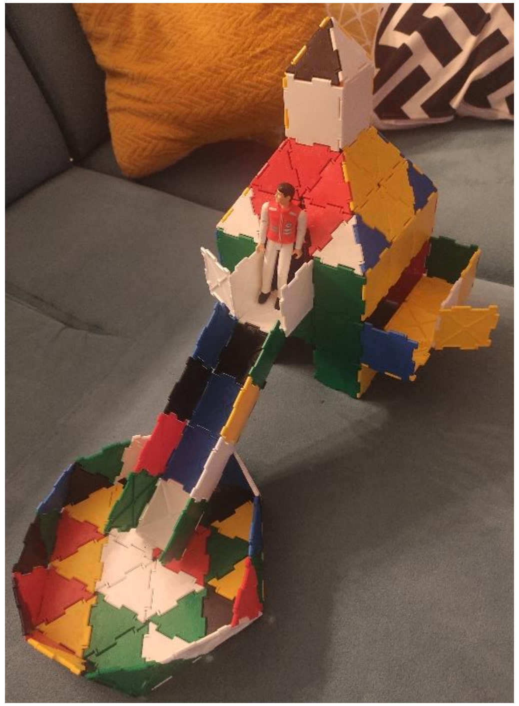
Prof. dr. Andrej Bauer: **Četverci za mlade od 9 do 99 let**

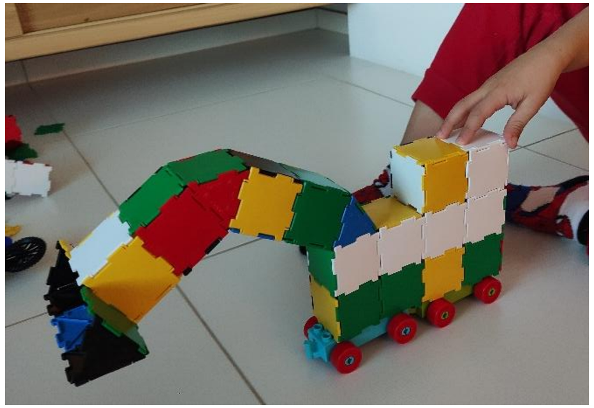


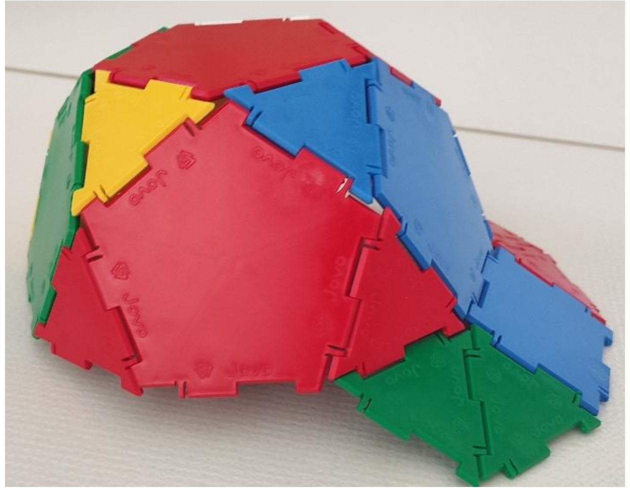


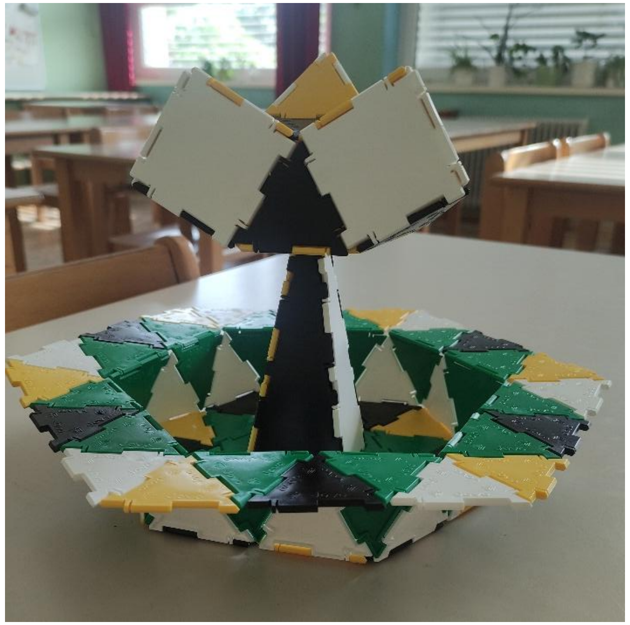


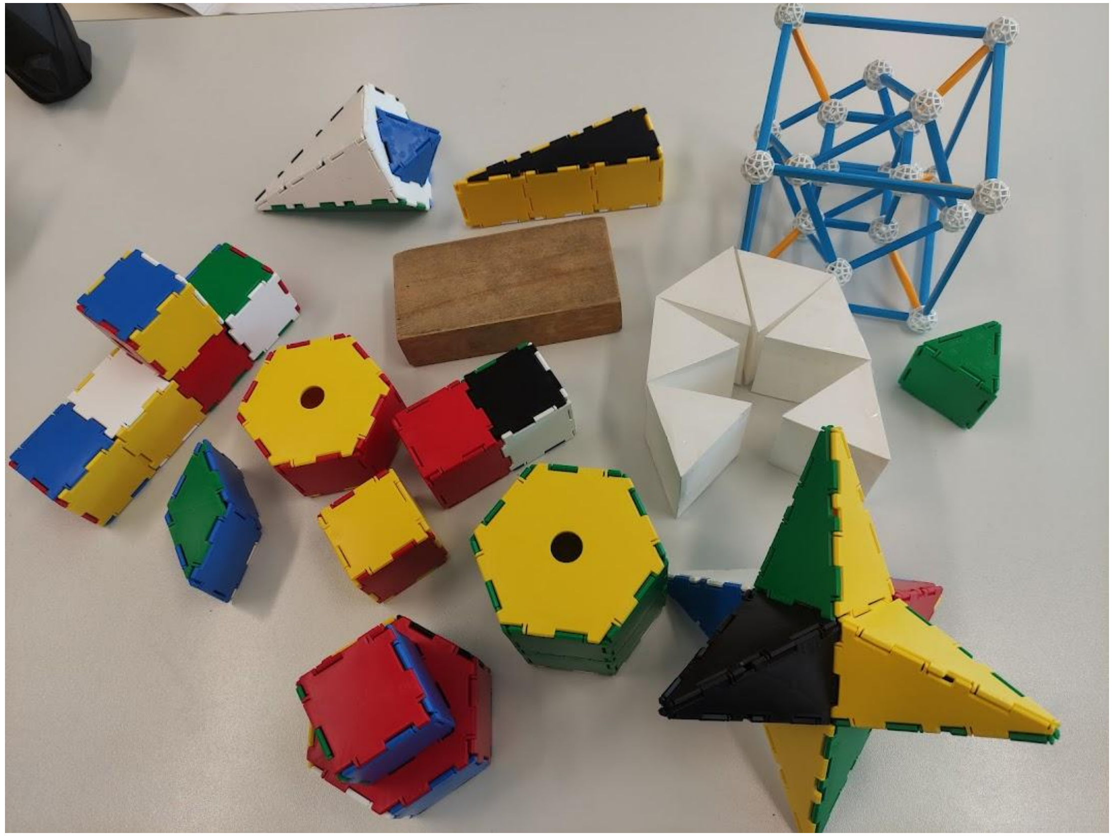






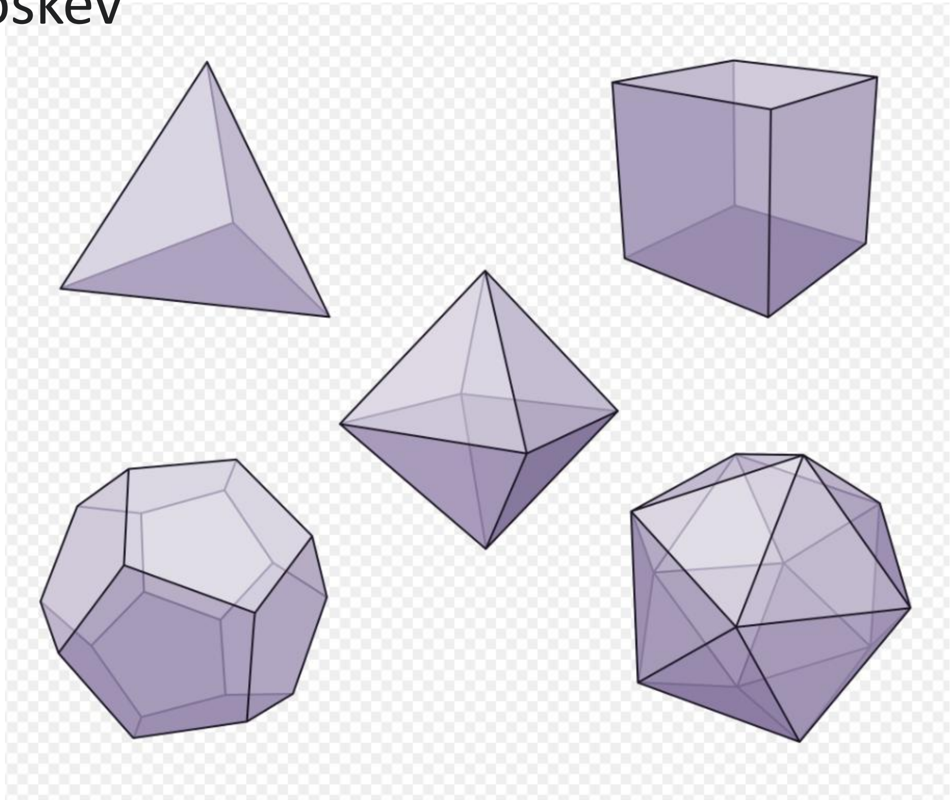




Platonska telesa

Platonsko telo (ali **pravilno telo)**
- konveksen polieder
- stranske ploskve so med seboj skladni pravilni mnogokotniki
- v vsakem oglišču se stika enako število stranskih ploskev



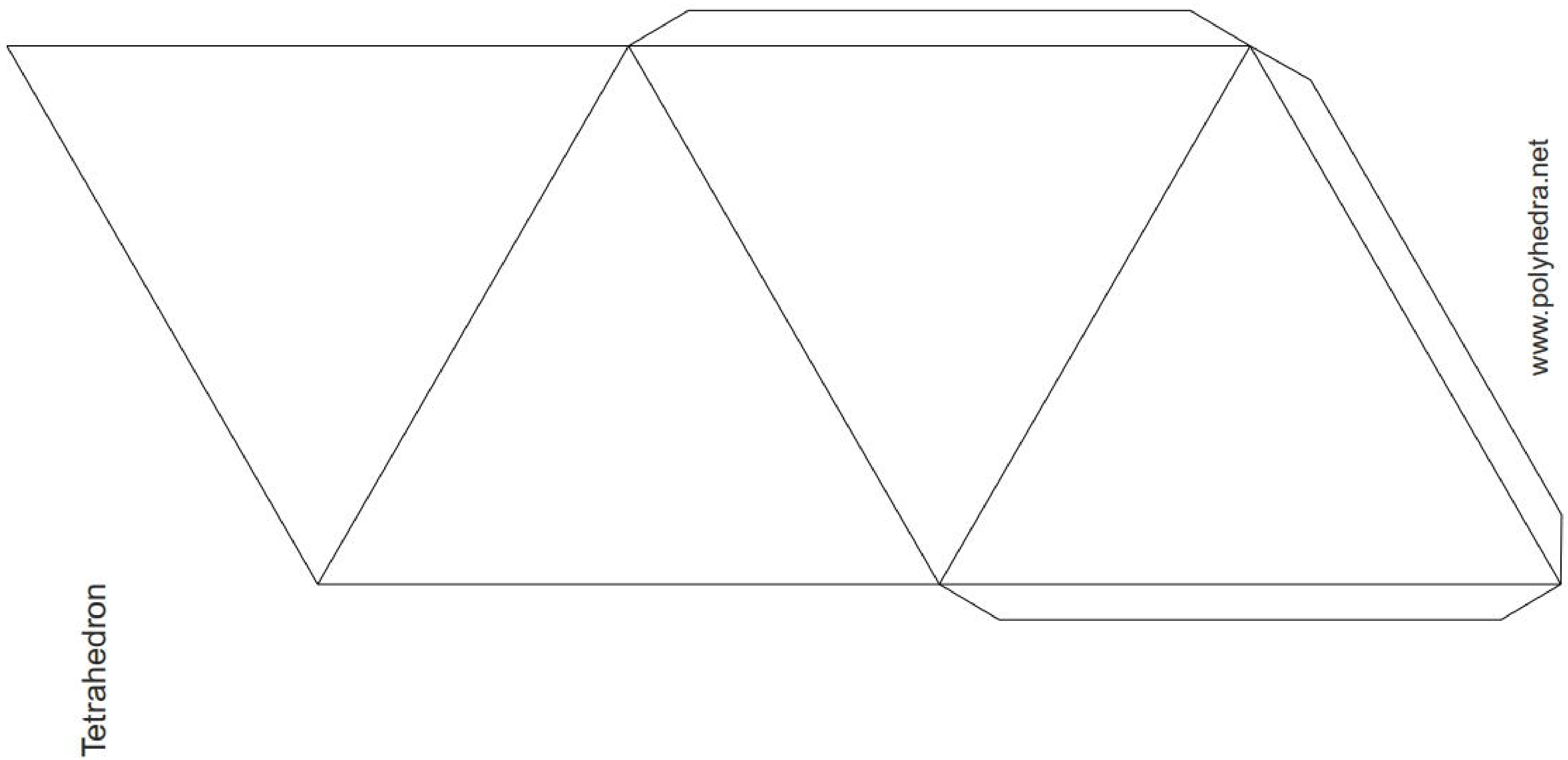
5 platonskih teles (znana že starim Grkom):
- četverec (tetraeder)
- kocka (heksaeder)
- osmerec (oktaeder)
- dvanajsterec (dodekaeder)
- dvajseterec (ikozaeder)

Kaj pravi ChatGPT?

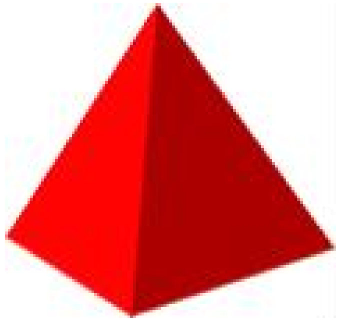
Znanje o Platonovih telesih je uporabno na več področjih, kjer se srečujemo s simetrijo, strukturo in geometrijskimi oblikami. Tukaj je nekaj primerov:

- 1. **Matematika in geometrija**: poučevanje osnov geometrijskih lastnosti, simetrij in kotov; raziskovanje lastnosti, kot so oglišča, robovi, ploskve; vizualizacijo pojmov, kot sta Eulerjeva formula in teorija grafov
- 2. **Naravoslovje in kemija**: Mnoge molekule in kristalne strukture imajo simetrijo, ki je podobna Platonovim telesom.
- 3. **Arhitektura in dizajn**: Zaradi simetrije in estetske privlačnosti se pogosto pojavljajo v arhitekturi in oblikovanju; estetsko zanimivi objekti
- 4. **Narava in biologija**: nekatere virusne kapside so oblikovane kot ikozaedri, saj ta oblika omogoča največjo stabilnost pri minimalnem številu gradnikov
- 5. **Fizika in astronomija**: teorija polj in simetrij; elementi v antični grški filozofiji (osnovne oblike narave)
- 6. **Učenje in poučevanje**: izdelovanje modelov, raziskovanje simetrije, igranje z refleksijo in rotacijo; spodbujanje k prostorskemu razmišljanju

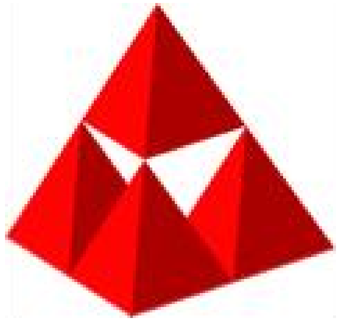
Konstruiranje tetraedra Sierpinskega



Število tetraedrov, ki ji potrebujemo za izdelavo tetraedra Sierpinskega



$4^0 = 1$

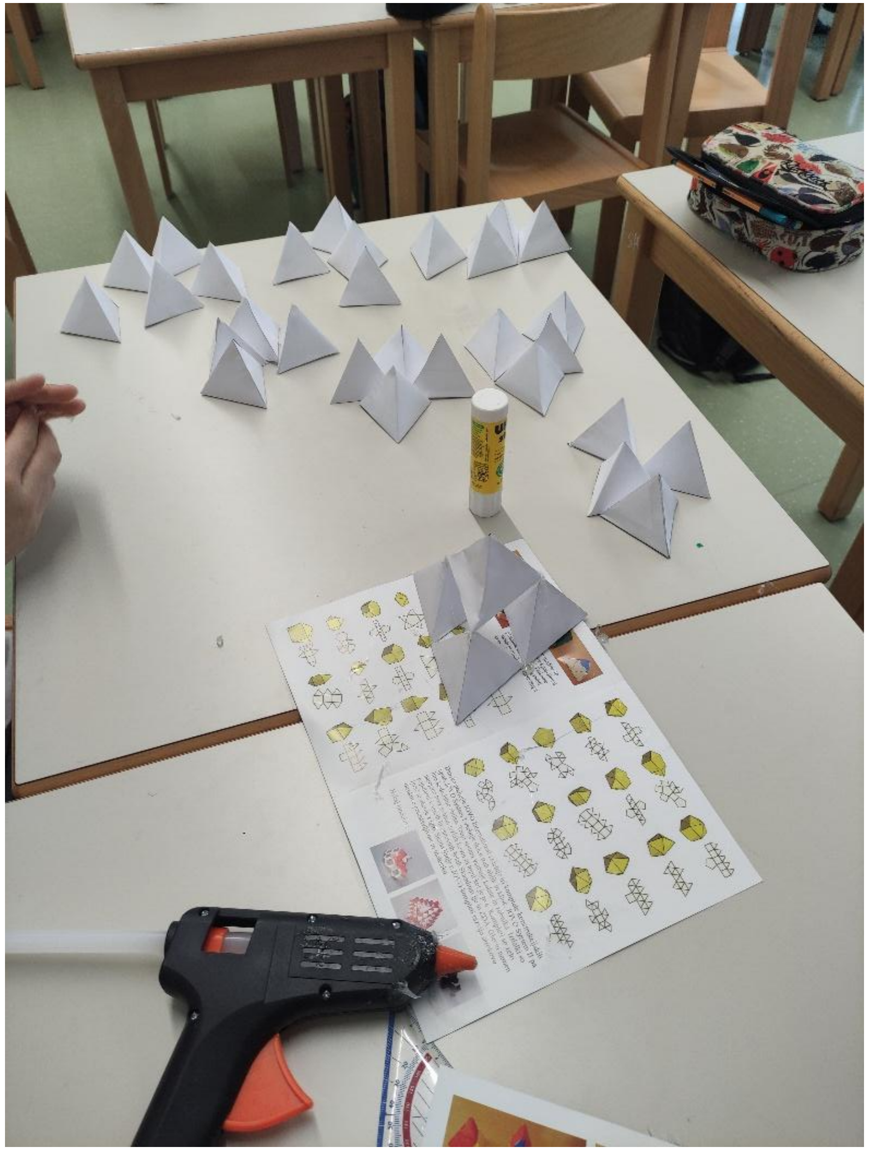


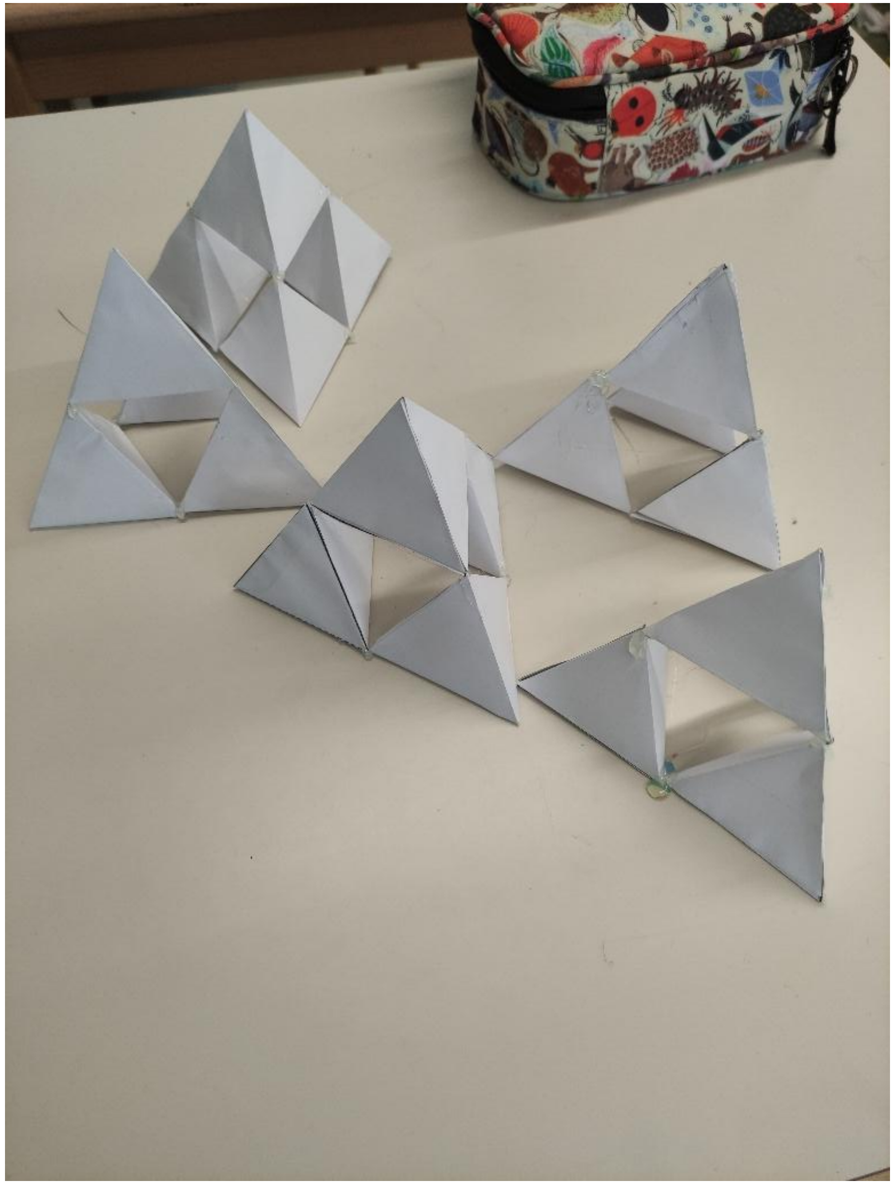
$4^1 = 4$

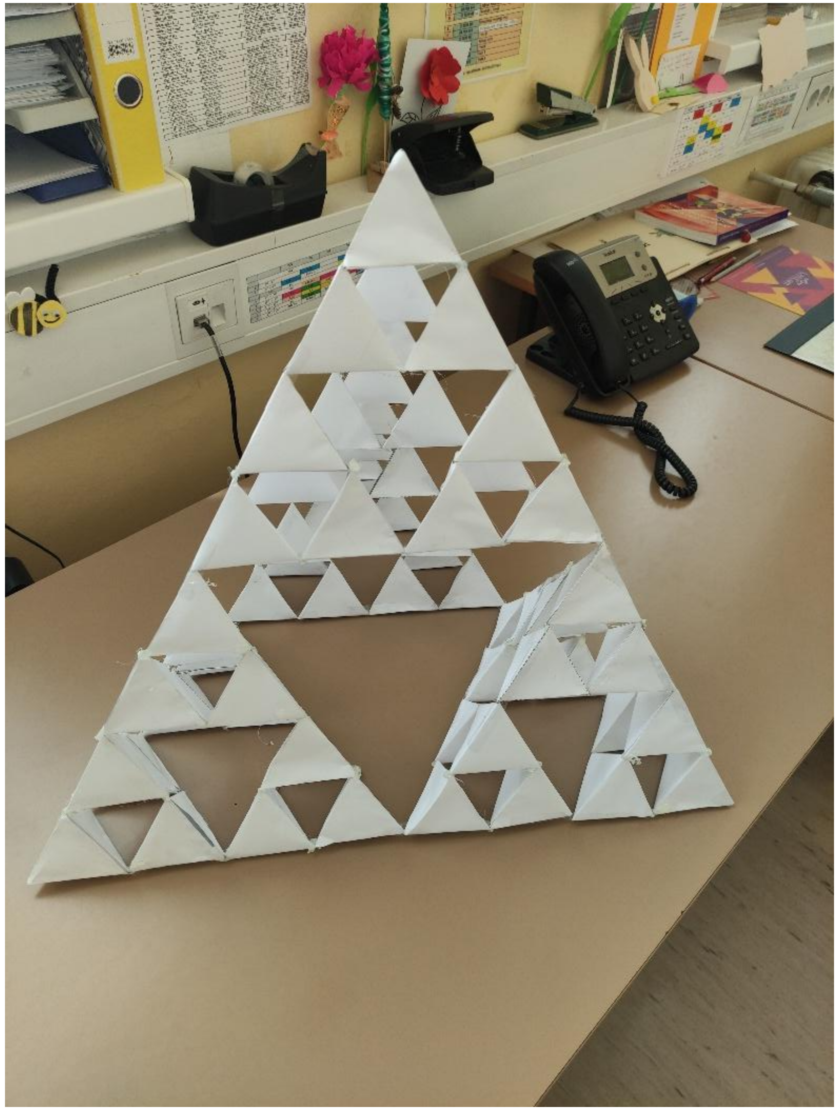
$4^2 = 16$

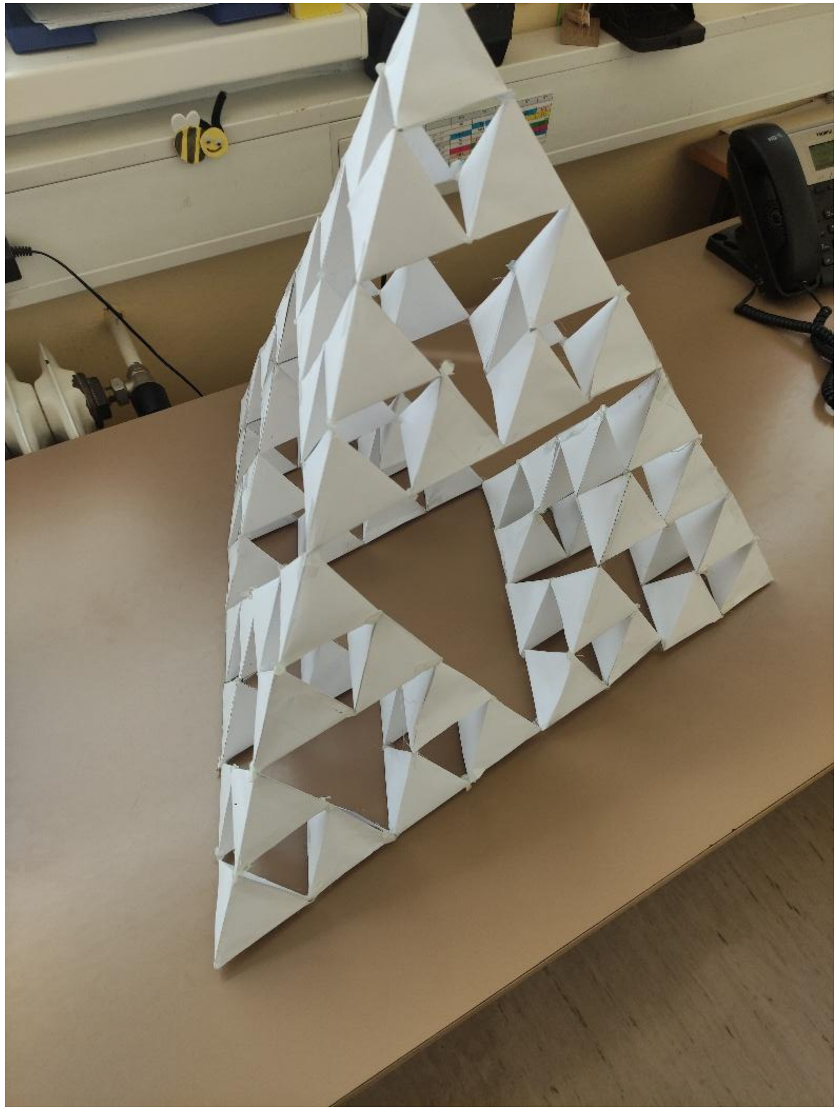
$4^3 = 64$

$4^4 = 256$

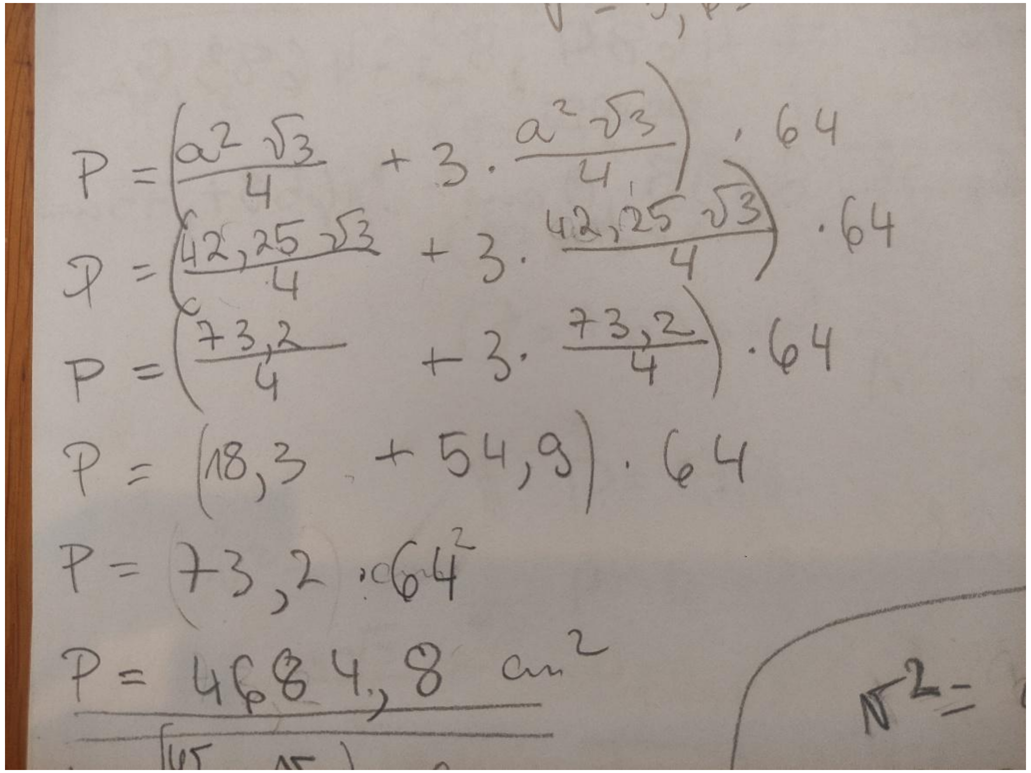


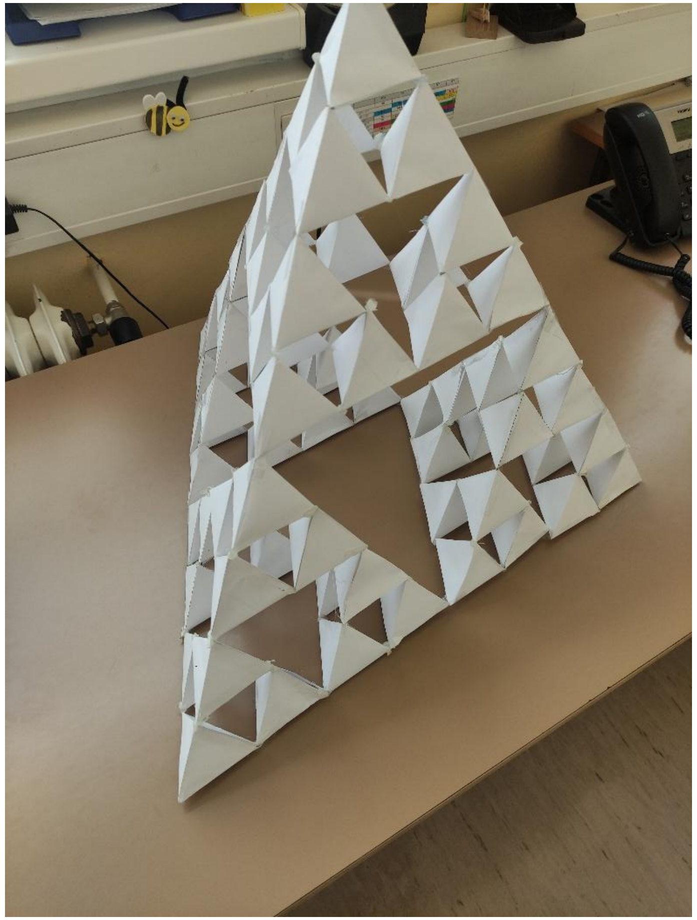






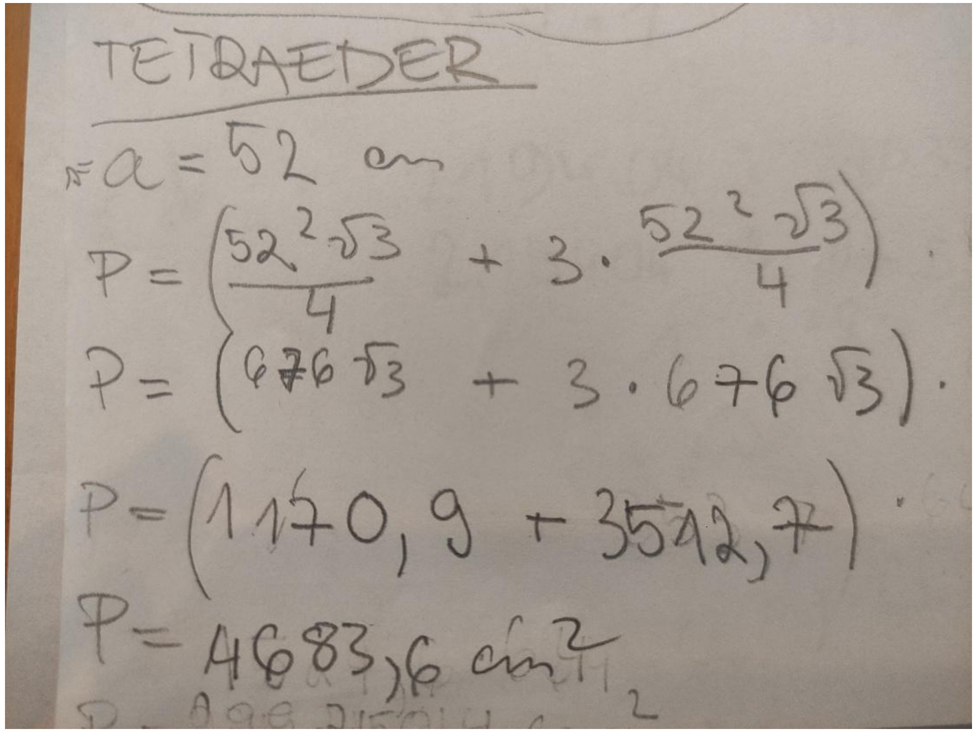
Računanje površine tetraedra Sierpinskega





Računanje površine tetraedra

- $P = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
- $P = a^2\sqrt{3}$



Razmerje površin

$P_{tetraeder\ o.} : P_{tetraedra} = 4684{,}8\ cm^2 : 4683{,}8\ cm^2$

$P_{tro} : P_{t} = 1 : 1$

Razmerje prostornin

$V = \frac{O \cdot v}{3}$

$V = \frac{18{,}27 \cdot 5{,}3}{3}$

$V = 32{,}27\ cm^3$

$V = 64 \cdot 32{,}27$

$V = 2065{,}28\ cm^3$

$V = \frac{O \cdot V}{3}$

$V = \frac{49\,585{,}95}{3}$

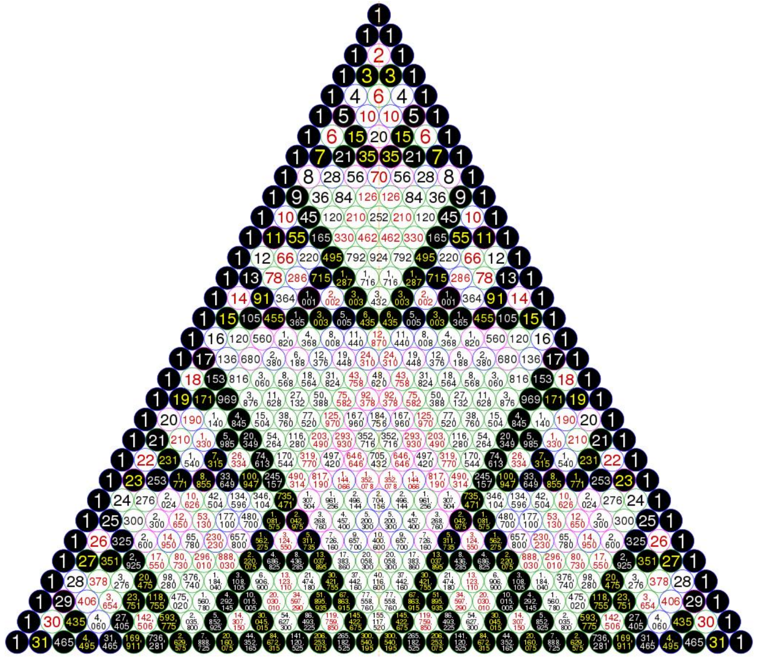
$V = 16\,528{,}65\ cm^3$

[redacted] $8{,}65 \doteq 1 : 8$

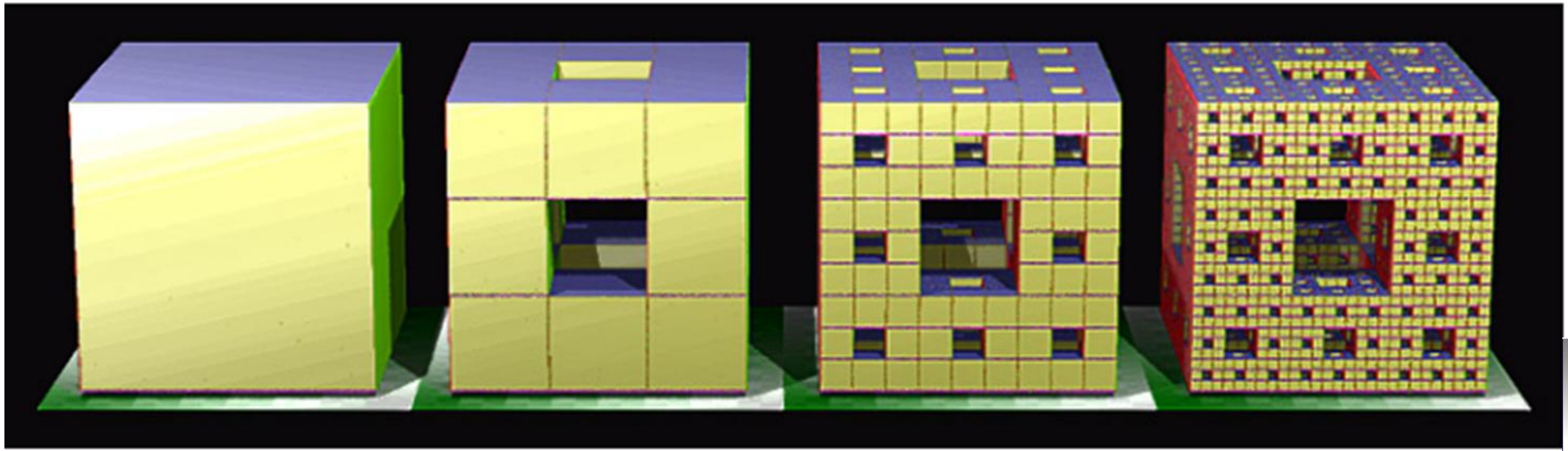
Pascalov trikotnik

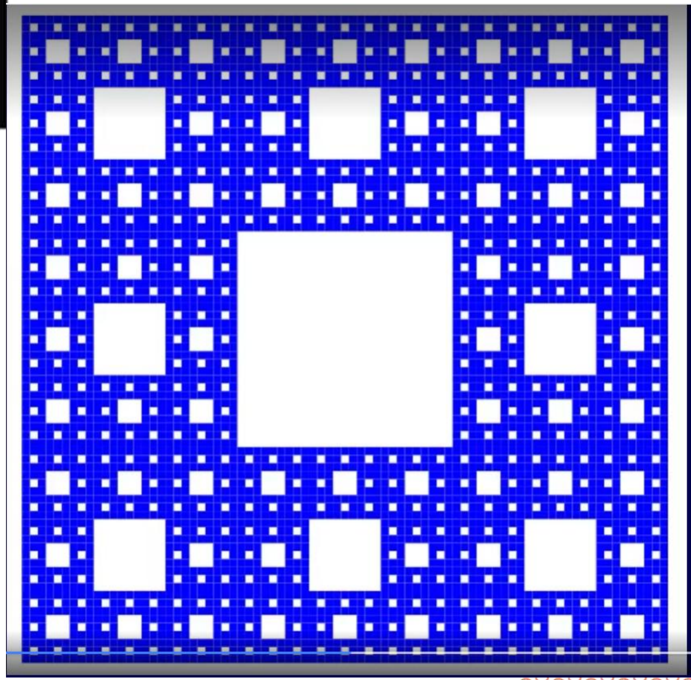
je povezan s trikotnikom Sierpinskega. Liha števila v Pascalovem trikotniku ležijo na robovih vseh trikotnikov, soda števila pa povsod vmes.

n = 4

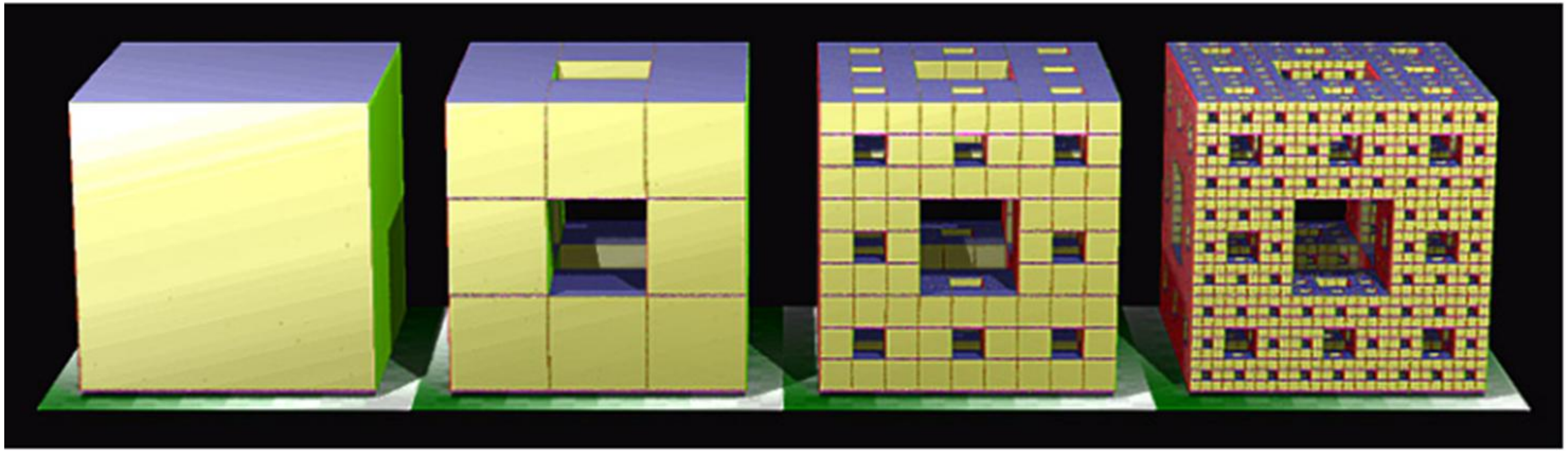


Mengerjeva spužva

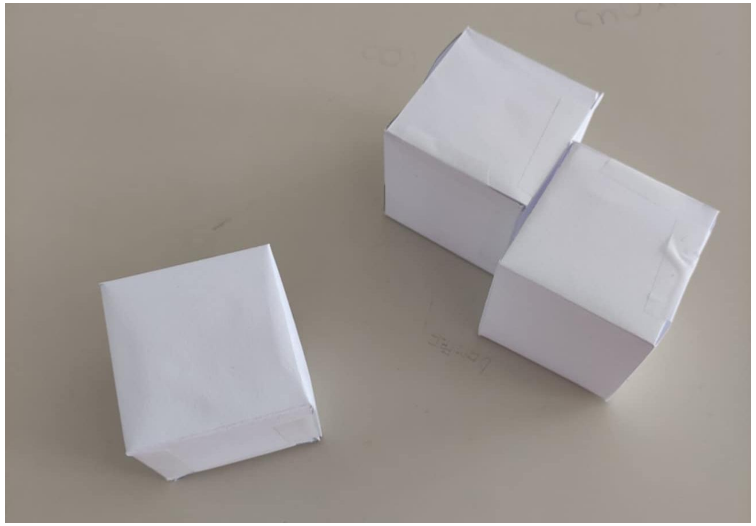


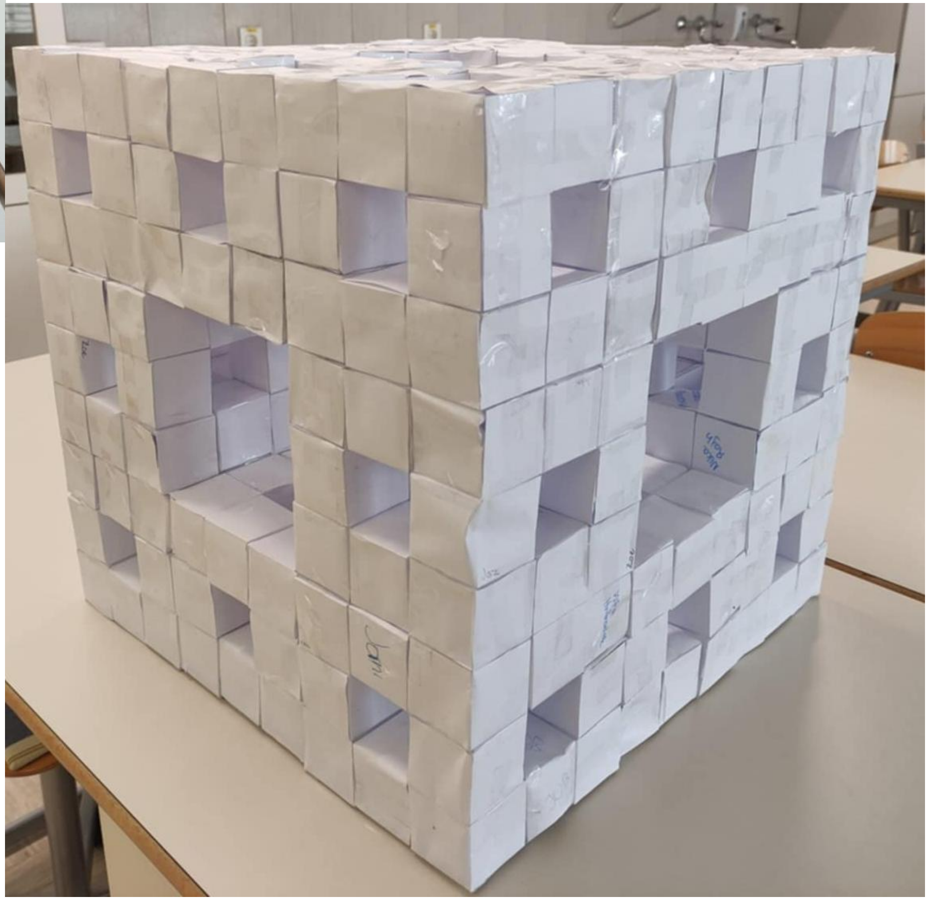


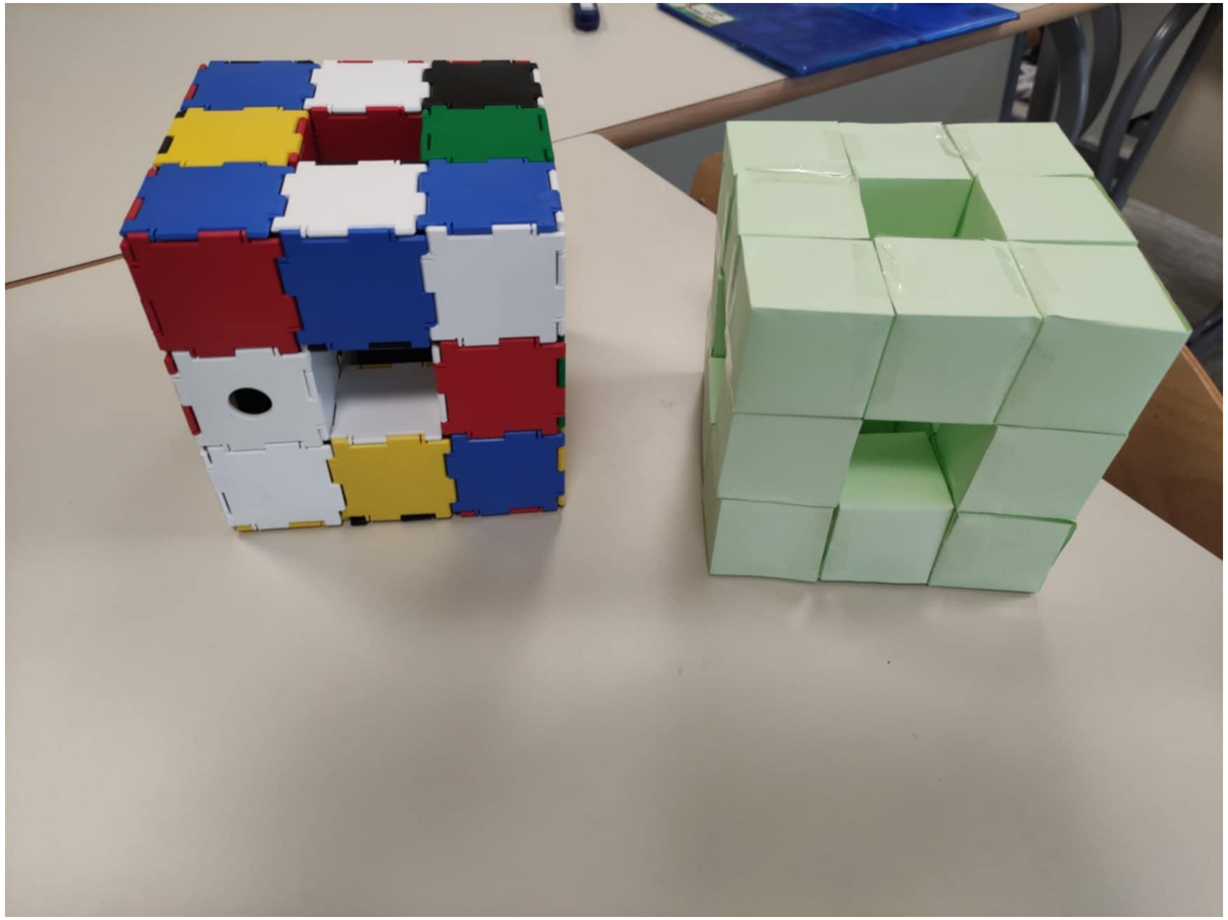
Novo šolsko leto – nove ideje

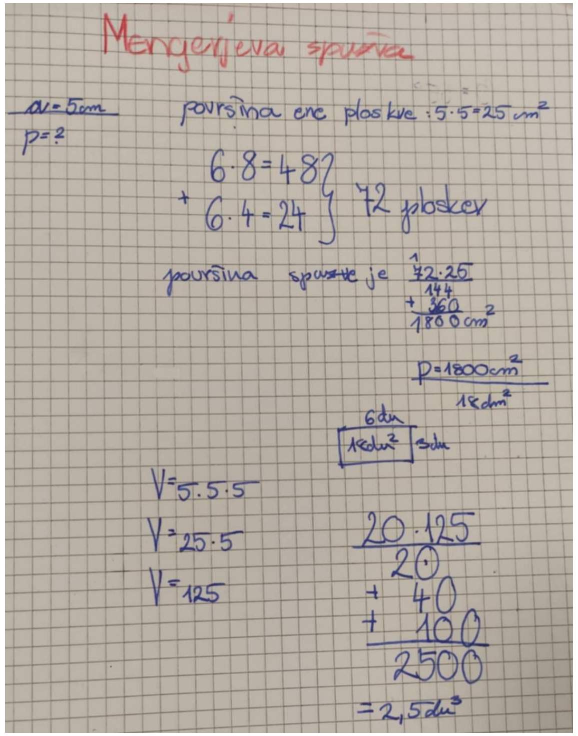


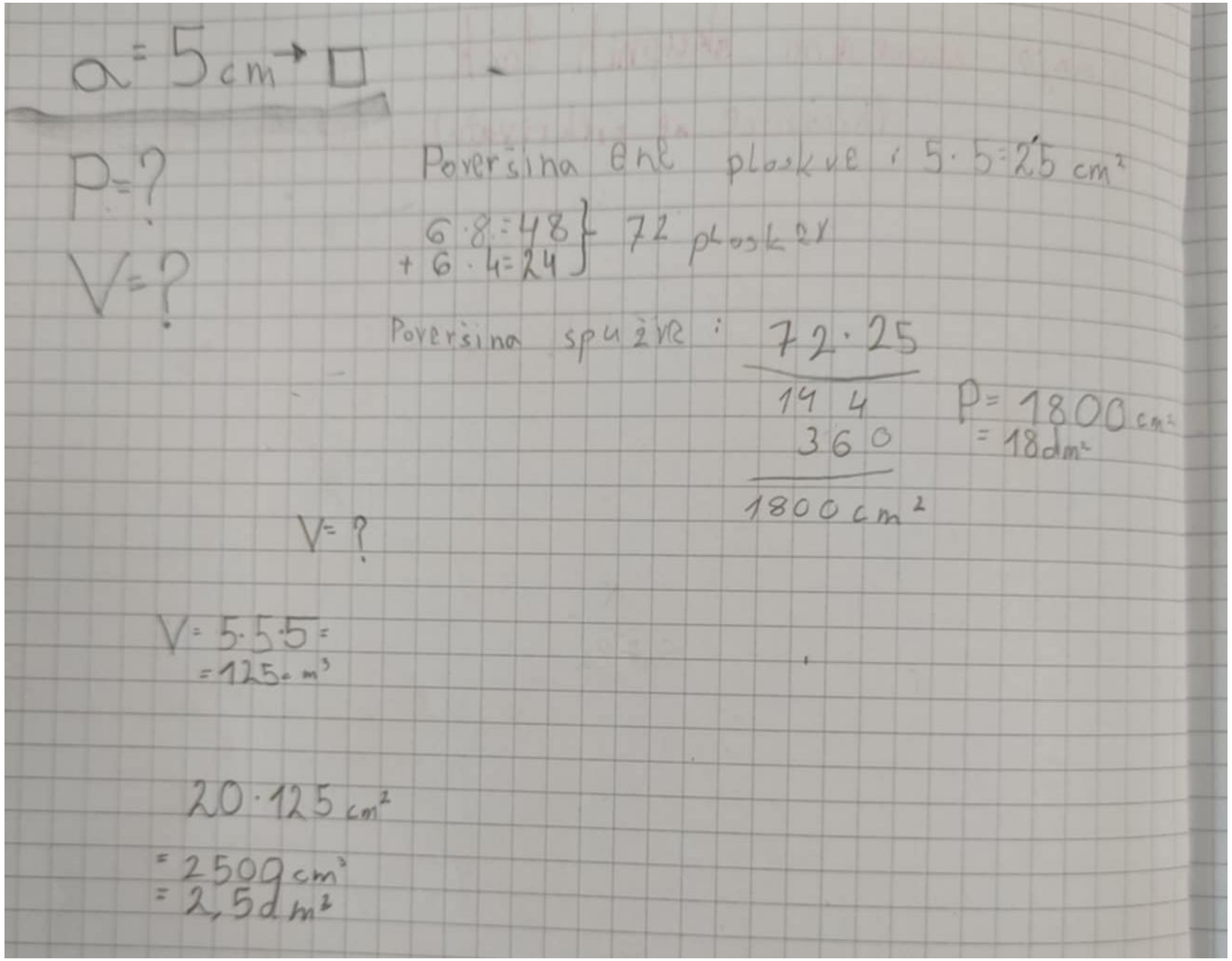
Število kock	**1**	**20**	$20 \cdot 20 = 400$	$400 \cdot 2 = 8000$



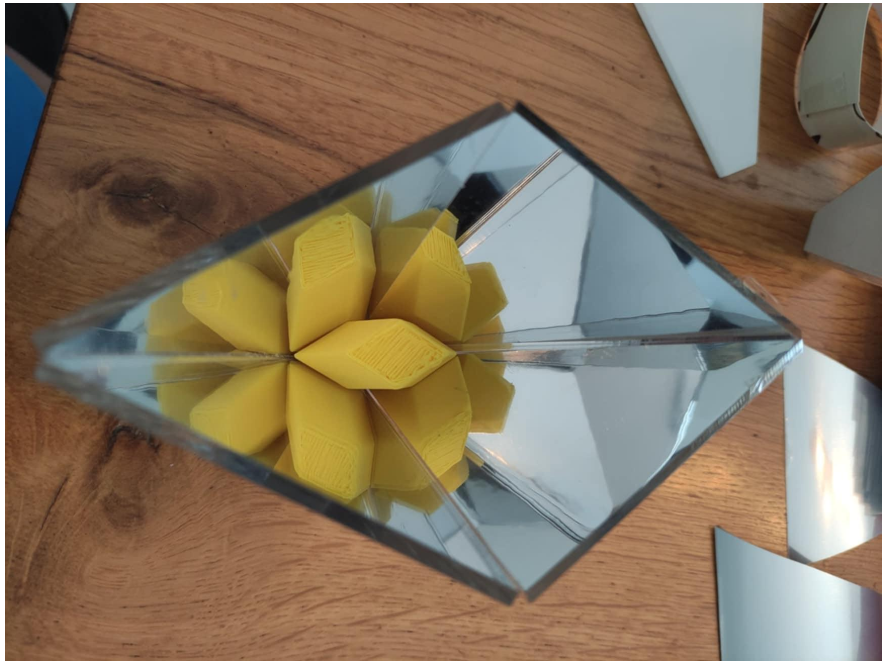





Mengerjeva spužva
a=5cm
p=?
površina ene ploskve : 5·5=25 cm²
6·8=48
+ 6·4=24
72 ploskev
površina spužve je 72·25
144
+ 360
1800 cm²
p=1800cm²
18dm²
6dm
18dm²
3dm
V=5·5·5
V=25·5
V=125
20·125
20
+ 40
+ 100
2500
=2,5dm³


a=5cm
P=?
V=?
Površina ene ploskve : 5·5=25 cm²
6·8=48
+ 6·4=24
72 ploskev
Površina spužve : 72·25
144
360
1800 cm²
P=1800 cm²
=18dm²
V=?
V=5·5·5=
=125cm³
20·125 cm²
=2500cm³
=2,5dm²

Kalejdoskop



Ime izvira iz grških besed:

- **"kalos"**(καλός) = lep
- **"eidos"** (εἶδος) = oblika/podoba
- **"skopein"**(σκοπεῖν) = gledati/opazovati

Kalejdoskop = opazovalec lepih oblik/gledalec lepih podob

Kalejdoskopi s premikanjem ustvarjajo simetrične, barvite vzorce, ki so tako vizualno privlačni.

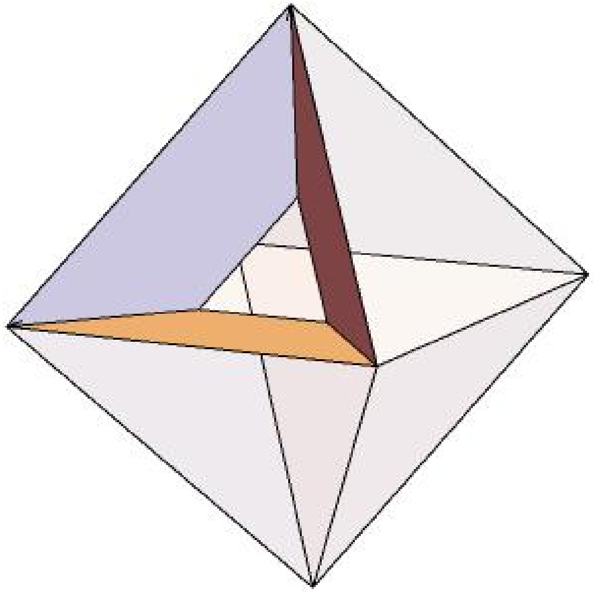
- prvič omenjen leta 1817 (David Brewster – škotski znanstvenik)
- odkrit po naključju

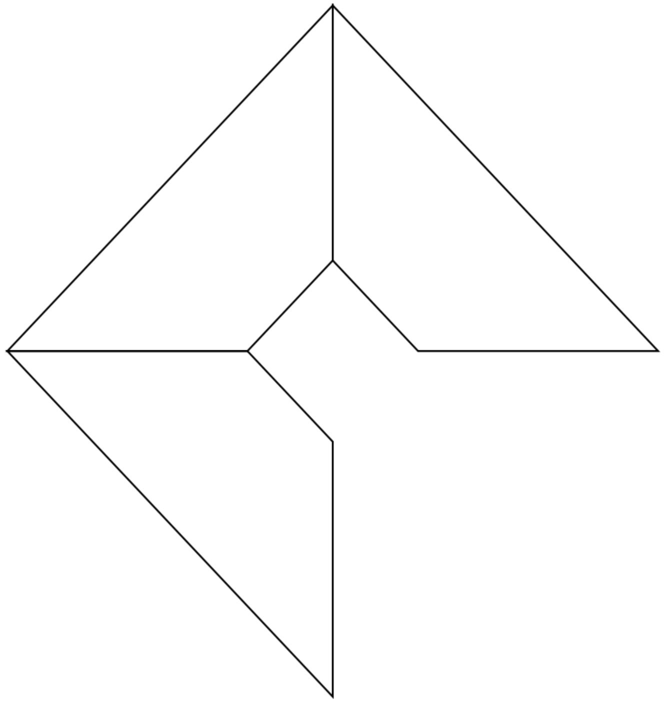
Učni načrt
Didaktična priporočila - Geometrija in Merjenje

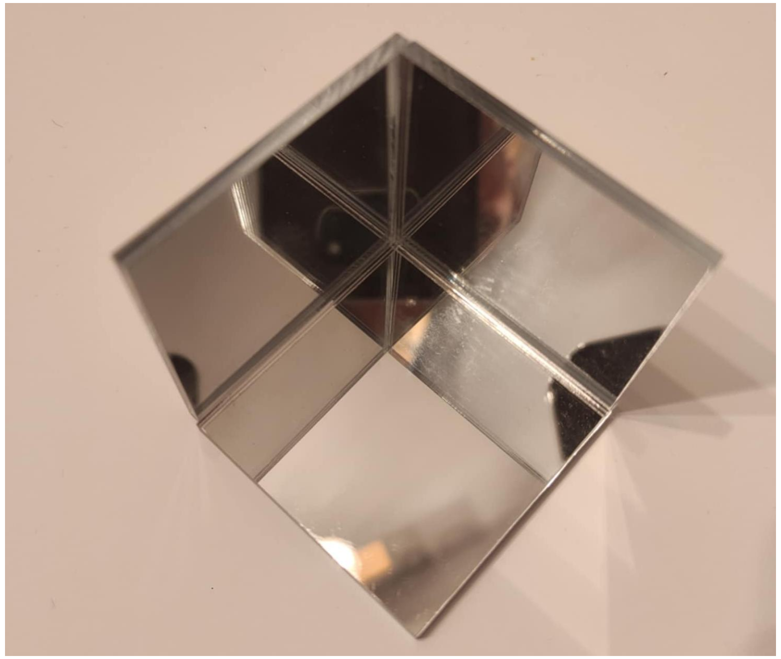
- V prvem vzgojno-izobraževalnem obdobju simetrijo obravnavamo s prepogibanjem, z mrežo, z zrcali ipd., v drugem vzgojno-izobraževalnem obdobju pa uvedemo nadgradnjo: učenci oblikujejo simetrične oblike in vzorce s premiki, vrteži ter z zrcaljenjem. Primer vzorca takega oblikovanja je ►▼▲◄ ►▼▲◄.

Osmerčev kalejdoskop

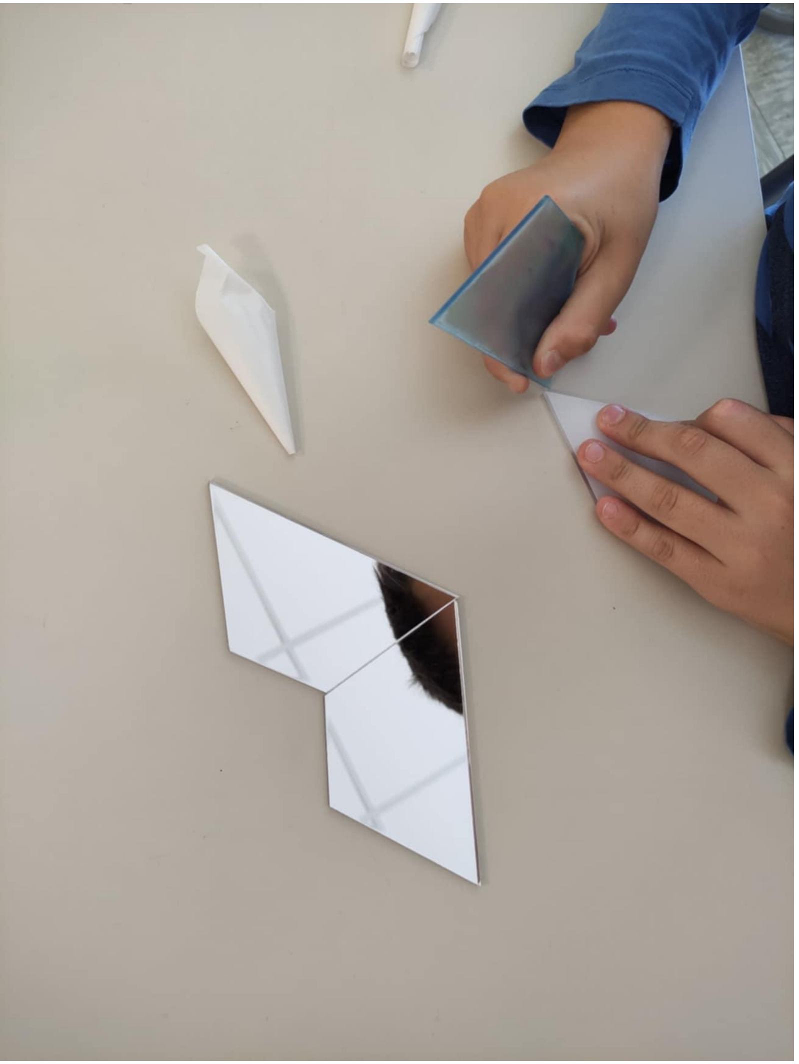
Sestavljen je iz treh med seboj pravokotnih zrcal. Lahko ga uporabimo pri arhimedskih telesih, tako da naredimo le osmino poliedra.

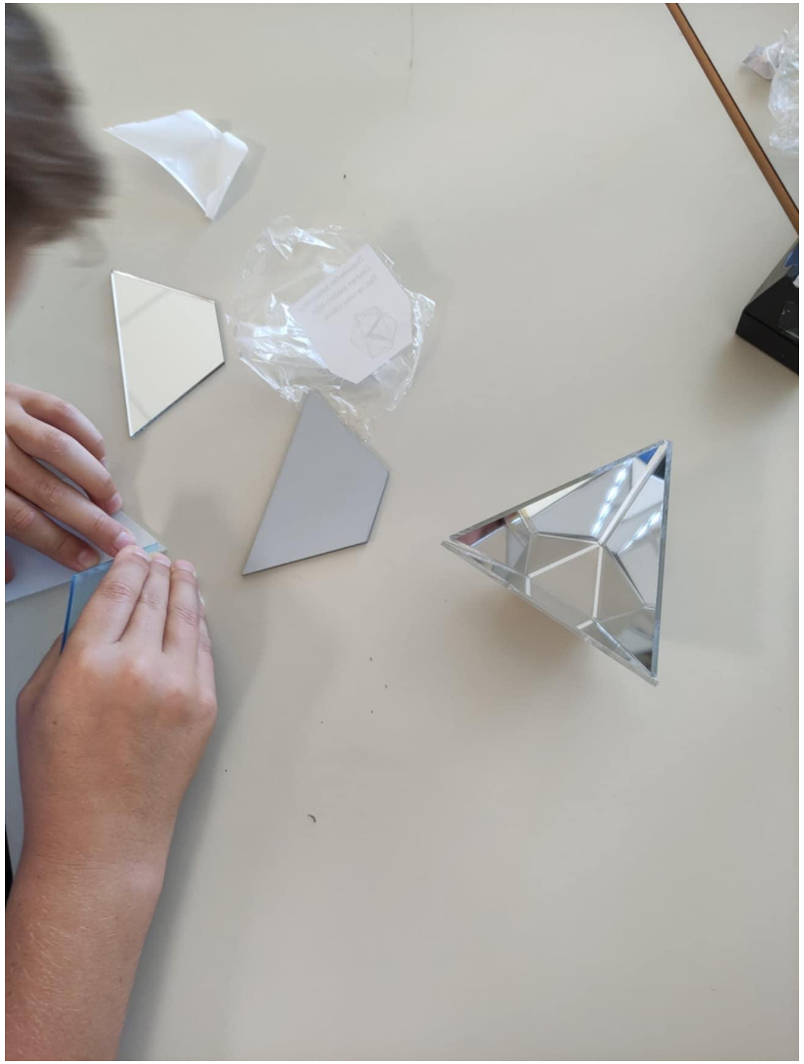


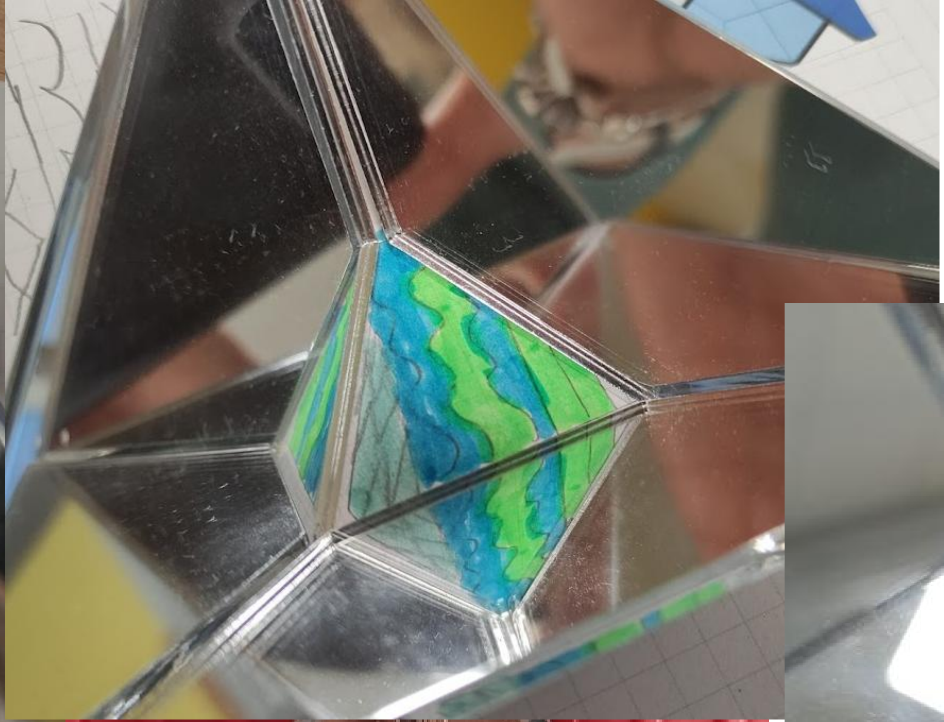




Arhimedsko telo je visoko simetrični, polpravilni polieder, ki ga sestavlja dva ali več vrst pravilnih mnogokotnikov, ki se srečajo v istem oglišču.





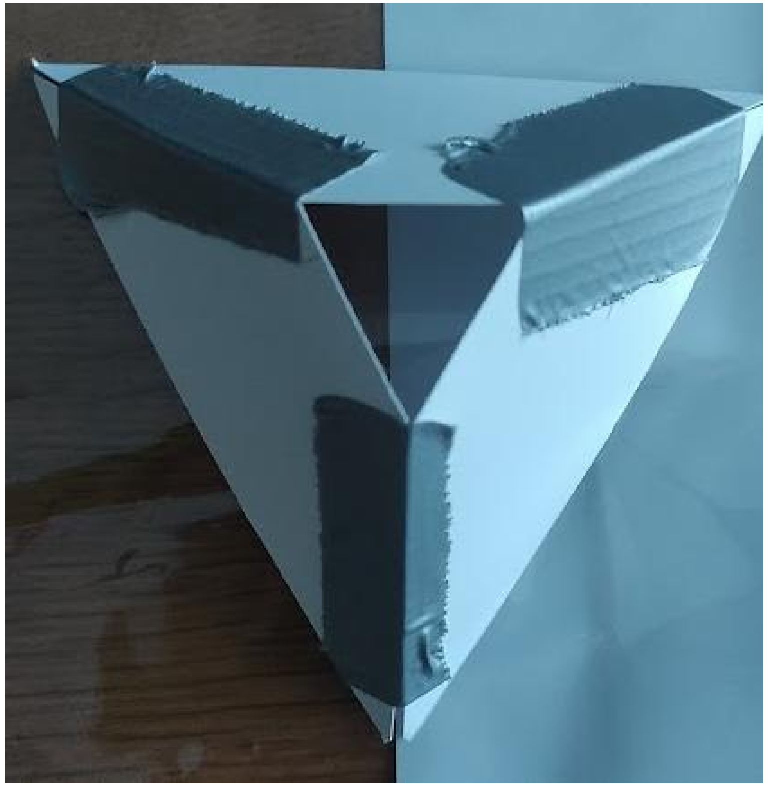



W W


M

Delavnica – osmerčev kalejdoskop

- 3 trapezi (bel trši papir)
- 3 trapezi (d-c-fix zrcalna folija)
- 3 nalepke (namesto selotejpa)



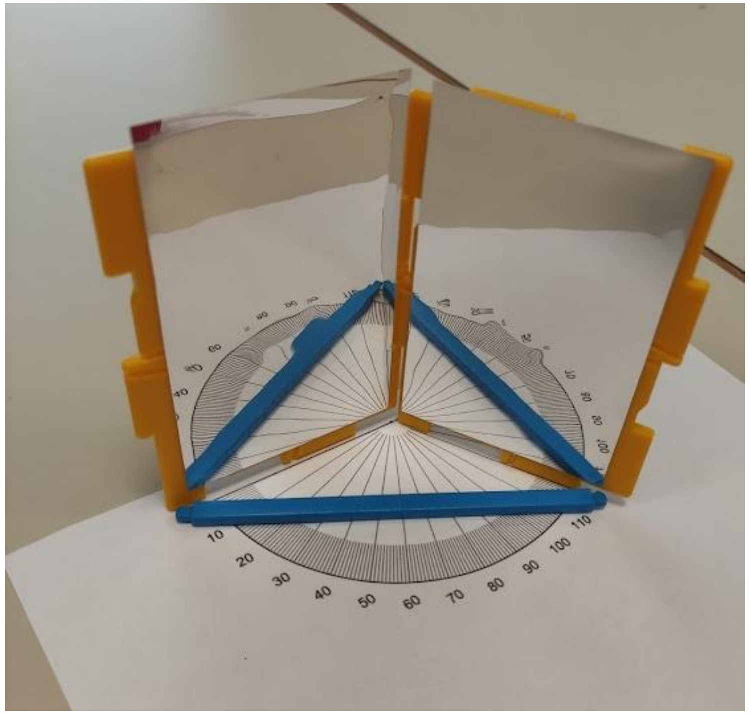
1. Vse 3 bele trapeze prelepite z zrcalno folijo.
2. Z nalepkami zlepite kalejdoskop.

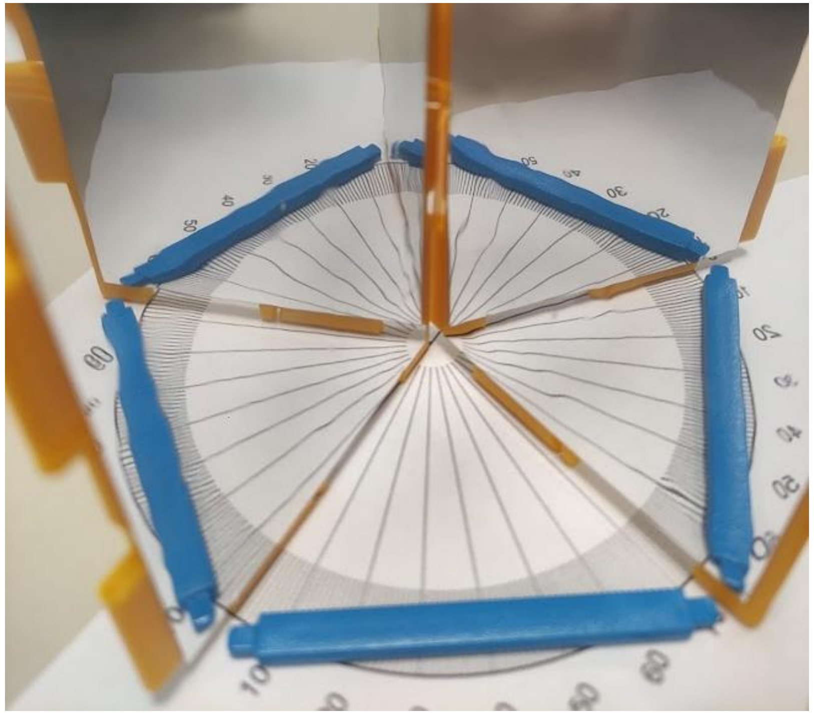
3. Na list papirja narišite črko ali vzorec in preizkusite kalejdoskop.

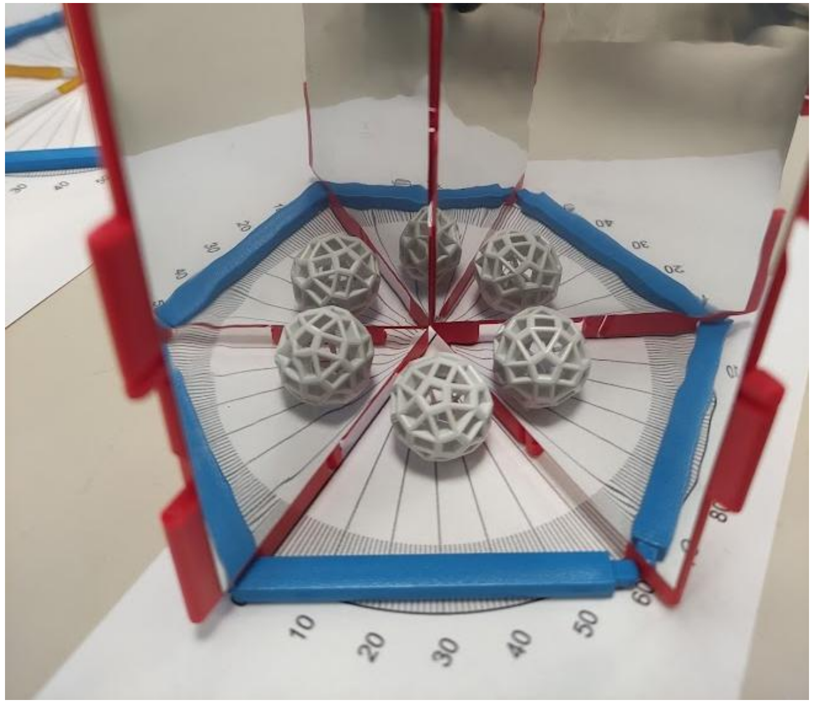
Na spletni strani https://sites.google.com/view/polyhedralworkshops/domov
so načrti za izdelavo vseh kalejdoskopov.

Kalejdoskopi z dvema zrcaloma - konstrukcija pravilnih večkotnikov

Če 2 zrcali postavimo pravokotno na ravnino, lahko konstruiramo pravilne večkotnike. Nastanejo jasni, simetrični in manj zapleteni vzorci, vendar še vedno vizualno privlačni.

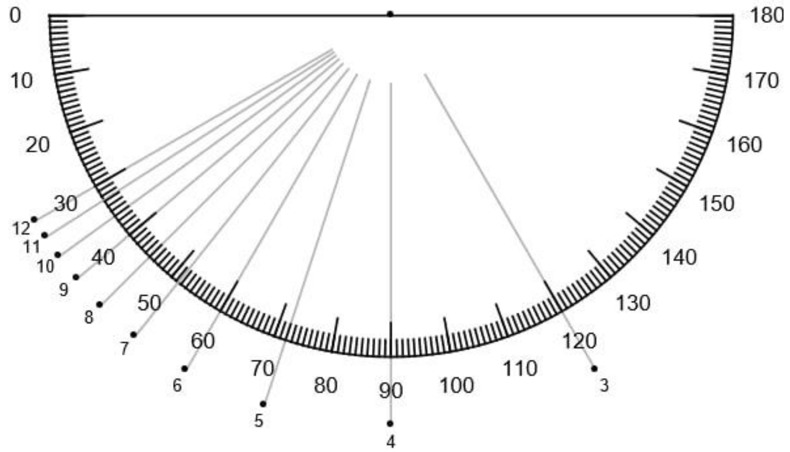


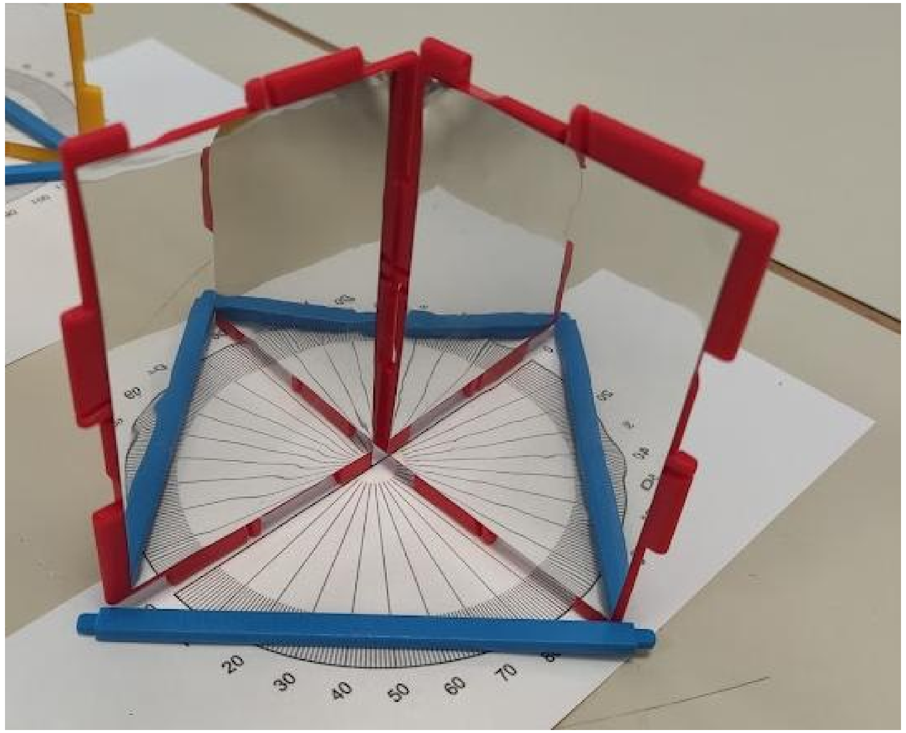




Delavnica – kalejdoskopi z dvema zrcaloma

- 2 zrcali
- kotomer





- Na papir narišite daljico in z različno postavitvijo ogledal iščite večkratne simetrije. Opazujte kot, pod katerim sta postavljeni ogledali.

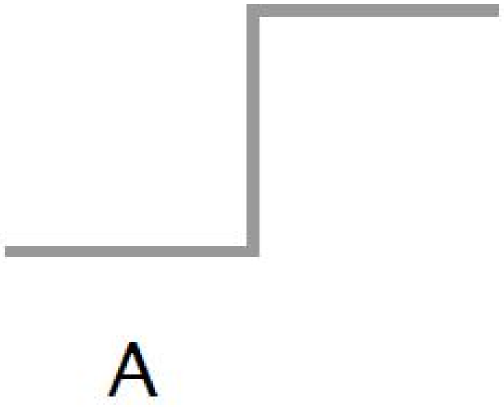
Delavnica - naloge za eno zrcalo

Naloga: Preberi besede.

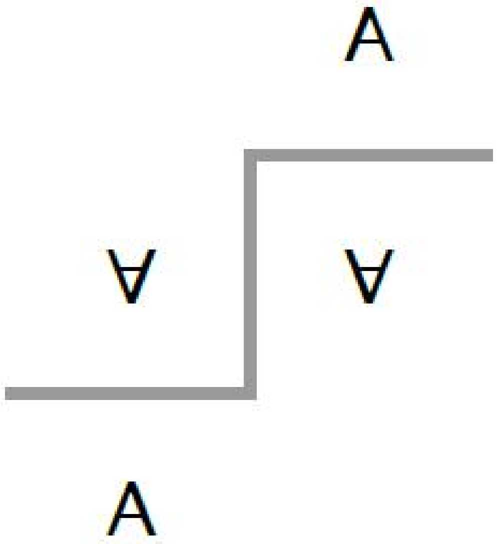
STRELA KAVIAR	PIJAČA KORALA
BALZAM GAZELA	MEDICA LOGIKA
RUDNIK TRINOG	MONSUN PRIHOD

Zrcaljenje črke čez premico

Naloga: Prezrcali črko čez daljico.

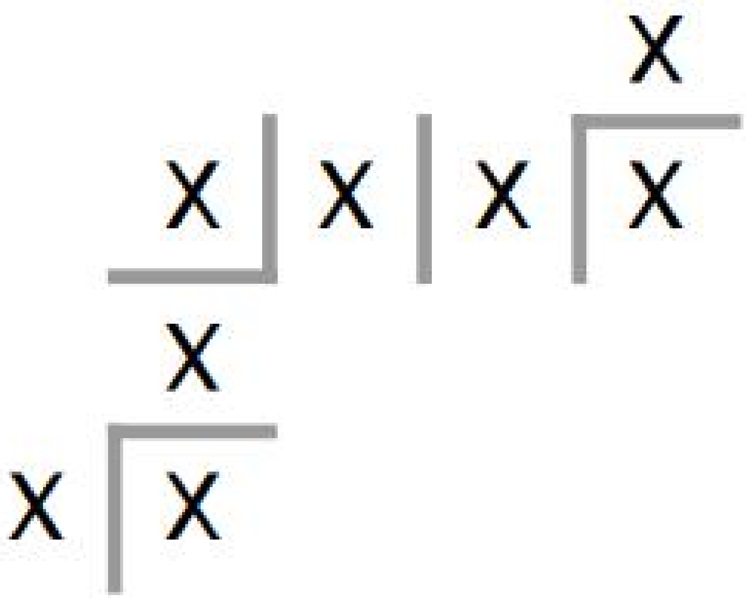


Rešitev:



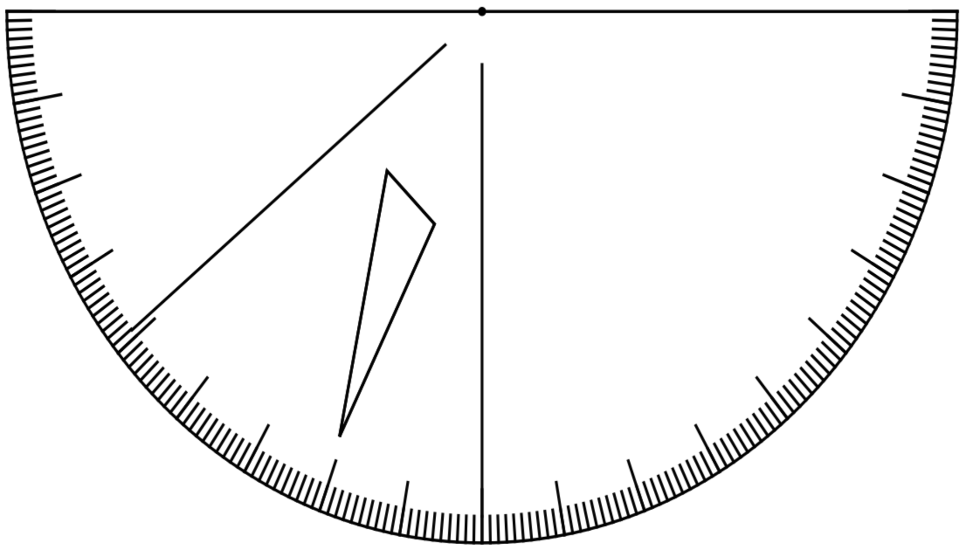
Naloga: Prezrcali črko čez daljico.

Rešitev:

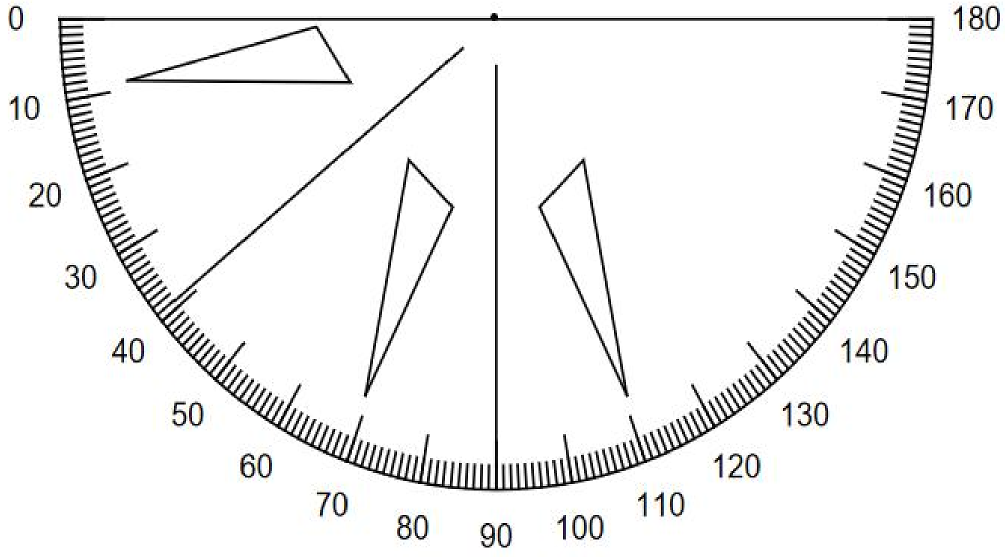


Naloge za dve zrcali

Trikotnik prezrcali čez dani daljici in zapiši kot rotacije dobljenih trikotnikov.

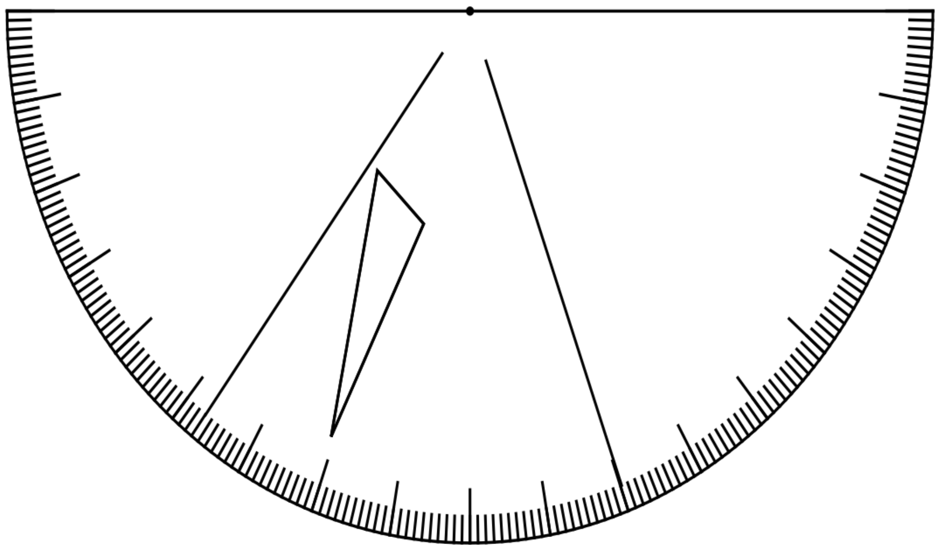


Rešitev:

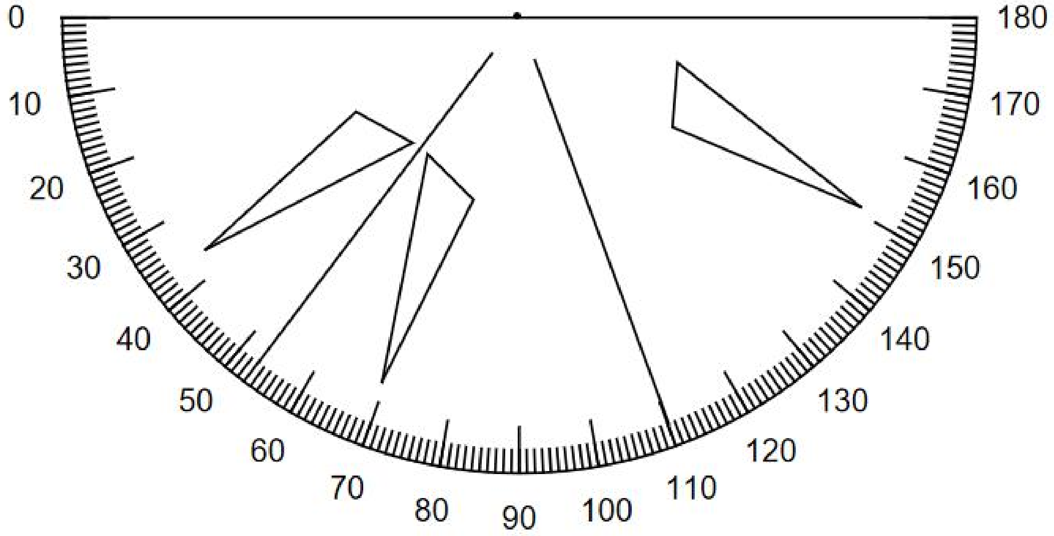


Kot zavrtitve = 102

Trikotnik prezrcali čez dani daljici in zapiši kot rotacije dobljenih trikotnikov.



Rešitev:



Kot zavrtitve = 114

Viri in literatura:

https://prezi.com/b1gb2pwvssxu/trikotnik-sierpinskega/

https://de.wikipedia.org/wiki/Sierpinski-Dreieck

https://www.polyhedra.net/pdf/tetrahedron.pdf

https://commons.wikimedia.org/wiki/Platonic_solid#/media/File:Platonic_Solids_Transparent.svg

https://sites.google.com/view/polyhedralworkshops/domov

https://www.polyhedra.net/en/

https://chatgpt.com/