KUPM 2024
6. KONFERENCA O UČENJU IN POUČEVANJU MATEMATIKE
Laško, 11. in 12. november 2024

Dolgočasna števila so eden od dokazov, da matematika ni dolgočasna

Gregor Pavlič

ARITMETIKA V.

6. konferenca o učenju in poučevanju matematike KUPM 2024

ZAVOD REPUBLIKE SLOVENIJE ZA ŠOLSTVO

REPUBLIKA SLOVENIJA MINISTRSTVO ZA VZGOJO IN IZOBRAŽEVANJE

I FEEL SLOVENIA

Sofinancira Evropska unija

NA VRTILJAKU ŠTEVIL

- **Takšna in drugačna števila:**
- **popolna, srečna, prijateljska, narcisoidna,**
- **dolgočasna, palindromna, platojska, depresivna,**
- **Friedmanova …,**
- **ampak prav vsa NARAVNA.**

KUPM 2024
6. KONFERENCA O UČENJU IN POUČEVANJU MATEMATIKE
Laško, 11. in 12. november 2024

Dolgočasna števila

Dolgočasna števila imajo vse števke enake, njihove lastnosti pa so prav zanimive. Najenostavneje zapišemo *enična* in *devetična* števila.

Prva so vsota vseh desetiških potenc, npr.

$$10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0 = 111111$$

druga pa za eno zmanjšane desetiške potence, npr.

$$10^6 - 1 = 99999$$

S pomočjo devetičnih števil lahko z uporabo

preproste formule $k \cdot \dfrac{10^n - 1}{10 - 1}$

lahko napišemo katero koli dolgočasno število.

Za zapis 5-mestnega *trojičnega* števila izberemo $k = 3$ in $n = 6$:

$$3 \cdot \frac{10^6 - 1}{10 - 1} = 3 \cdot \frac{99999}{9} = 3 \cdot 11111 = 33333$$

Obstaja precej računskih vragolij, s katerimi dobimo *dolgočasna* ali *skoraj-dolgočasna števila*

$1 \cdot 9 + 2 = 11$
$12 \cdot 9 + 3 = 111$
$123 \cdot 9 + 4 = 1111$
$1234 \cdot 9 + 5 = 11111$
$12345 \cdot 9 + 6 = 111111$
$123456 \cdot 9 + 7 = 1111111$
$1234567 \cdot 9 + 8 = 11111111$
$12345678 \cdot 9 + 9 = 111111111$
$123456789 \cdot 9 + 10 = 1111111111$

$$12345679 \cdot 9 = 111111111$$
$$12345679 \cdot 18 = 222222222$$
$$12345679 \cdot 27 = 333333333$$
$$12345679 \cdot 36 = 444444444$$
$$12345679 \cdot 45 = 555555555$$
$$12345679 \cdot 54 = 666666666$$
$$12345679 \cdot 63 = 777777777$$
$$12345679 \cdot 72 = 888888888$$
$$12345679 \cdot 81 = 999999999$$

$$222+(333)^2 = 111111$$
$$2222+(3333)^2 = 11111111$$
$$22222+(33333)^2 = 1111111111$$

$9 \cdot 9 + 7 = 88$

$98 \cdot 9 + 6 = 888$

$987 \cdot 9 + 4 = 88888$

$98765 \cdot 9 + 3 = 888888$

$987654 \cdot 9 + 2 = 8888888$

$9876543 \cdot 9 + 1 = 88888888$

$98765432 \cdot 9 + 0 = 888888888$

$7 \cdot 7 = 49$

$67 \cdot 67 = 4489$

$667 \cdot 667 = 444889$

$6667 \cdot 6667 = 44448889$

$66667 \cdot 66667 = 4444488889$

$666667 \cdot 666667 = 444444888889$

$6666667 \cdot 6666667 = 44444448888889$

$$6 \cdot 7 = 42$$

$$66 \cdot 67 = 4422$$

$$666 \cdot 667 = 444222$$

$$6666 \cdot 6667 = 44442222$$

$$66666 \cdot 66667 = 4444422222$$

$$666666 \cdot 666667 = 444444222222$$

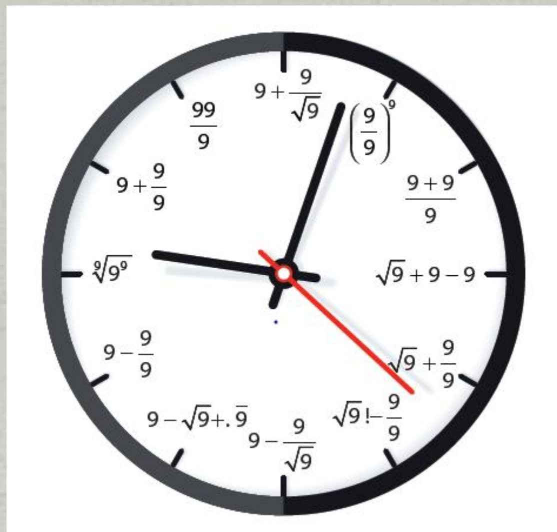
$$6666666 \cdot 6666667 = 44444442222222$$

$$66666666 \cdot 66666667 = 4444444422222222$$

$$666666666 \cdot 666666667 = 444444444222222222$$

$$4 \cdot 4 = 16$$
$$34 \cdot 34 = 1156$$
$$334 \cdot 334 = 111556$$
$$3334 \cdot 3334 = 11115556$$
$$33334 \cdot 33334 = 1111155556$$

$$9 \cdot 9 = 81$$
$$99 \cdot 99 = 9801$$
$$999 \cdot 999 = 998001$$
$$9999 \cdot 9999 = 99980001$$
$$99999 \cdot 99999 = 9999800001$$
$$999999 \cdot 999999 = 999998000001$$
$$9999999 \cdot 9999999 = 99999980000001$$
$$99999999 \cdot 99999999 = 9999999800000001$$
$$999999999 \cdot 999999999 = 999999998000000001$$



$$9+\frac{99}{99}=10 \qquad 9+\frac{9+9}{9+9}=10 \qquad \left(9+\frac{9}{9}\right)\cdot\frac{9}{9}=10$$

$$9+9-9+\frac{9}{9}=10 \qquad 9+\frac{9\cdot 9}{9\cdot 9}=10 \qquad 9^{\frac{9}{9}}+\frac{9}{9}=10$$

$$\sqrt{9}+\sqrt{9}+\sqrt{9}+\frac{9}{9}=10$$

$3 \cdot 37 = 111;$ $\quad$ $1 + 1 + 1 = 3$

$6 \cdot 37 = 222;$ $\quad$ $2 + 2 + 2 = 6$

$9 \cdot 37 = 333;$ $\quad$ $3 + 3 + 3 = 9$

$12 \cdot 37 = 444;$ $\quad$ $4 + 4 + 4 = 12$

$15 \cdot 37 = 555;$ $\quad$ $5 + 5 + 5 = 15$

$18 \cdot 37 = 666;$ $\quad$ $6 + 6 + 6 = 18$

$21 \cdot 37 = 777;$ $\quad$ $7 + 7 + 7 = 21$

$24 \cdot 37 = 888;$ $\quad$ $8 + 8 + 8 = 24$

$27 \cdot 37 = 999;$ $\quad$ $9 + 9 + 9 = 27$

Palindromna števila

- $111 \cdot 111 = 12321$

  $1111 \cdot 1111 = 1234321$

- $11111 \cdot 11111 = 123454321$

  $111111 \cdot 111111 = 12345654321$

  $1111111 \cdot 1111111 = 1234567654321$

  $11111111 \cdot 11111111 = 123456787654321$

  $111111111 \cdot 111111111 = 12345678987654321$

Koliko je vseh 4-mestnih palindromnih števil?

Kaj pa 5, 6, 7-mestnih?

Palindromi

V elipsi spi lev.

Perica reže raci rep.

Maksi peče me če piskam.

Črv nese lesen vrč.

Šepam od doma peš.

Ali se bo Gordana na drog obesila.

Madam I'm Adam.

Matej je tam.

Tolpa natika kita na plot.

Edo suče meč usode.

Nemi topot imen.

Jakob, bo kaj?

Ata, kidni s sindikata.

Ali se bo Ana obesila?

Nemi topot imen.

- Osem opitih hiti po meso.
  Ema, zakaj ni vinjaka zame?
  Cesar prasec.
  Tolpa natika kita na plot.
  Klovn in volk.
  Bo kaj sena danes, Jakob?
  Hudir bo dobri duh.
  Kapelniki že ne vedo ali bo dama dobila od Eve Nežikin lepak.
  Peter pazi se, če si za pretep!
  Omamiti hiti mamo.
  A lovi Božo bivola?
  A Peter potem Meto pretepa?
- Ona seksa skesano.
  Gol vozim mizo v log.

- Platojska in depresivna števila

- *Platojsko število* je palindromno in skoraj dolgočasno število oblike
- *abbbb…ba*, kjer je $a < b$, npr. 1881, 14441, 277772, 3888883, 45555554.

- Podobno lahko definiramo *depresivno število*, ki je prav tako oblike
- *abbbb…ba,* le da je

- $a > b$, npr. 31113, 811118, 52225, 97777779.

- Tudi <u>nekatera </u> platojska in depresivna števila dobimo z množenjem
- dolgočasnih ali skoraj dolgočasnih števil.

  - $11 \cdot 11 = 121$
  - $111 \cdot 11 = 1221$
  - $1111 \cdot 11 = 12221$
  - $11111 \cdot 11 = 122221$
  - $111111 \cdot 11 = 1222221$

$67 \cdot 11 = 737$
$667 \cdot 11 = 7337$
$6667 \cdot 11 = 73337$
$66667 \cdot 11 = 733337$
$666667 \cdot 11 = 7333337$

$89 \cdot 11 = 979$
$889 \cdot 11 = 9779$
$8889 \cdot 11 = 97779$
$88889 \cdot 11 = 977779$
$888889 \cdot 11 = 9777779$

Vsa števila iz zgornjih primerov so deljiva z 11. Za platojska in depresivna števila s sodo mnogo števkami velja, da so sestavljena, saj za $N = abbbbbba\ldots a$ velja

$a - b + b - b + \ldots - a = 0$, kar pomeni, da je N deljivo z 11.

Nekatera platojska in depresivna števila so tudi praštevila: npr.

13331
16661
19991
76667
1777771
188888881
722222227
1666666666661

31111111113	(11 števk),
3111111111113	(13 števk)
31111...11113	(31 števk)
15555...15555	(33 števk)
78888...88887	(87 števk)
18888...88881	(93 števk)
13333...33331	(95 števk)
98888...88889	(97 števk)

Friedmanova števila

Naravno število je Friedmanovo, če ga lahko zapišemo kot aritmetični izraz njegovih števk, pri čemer uporabljamo seštevanje, odštevanje, množenje, deljenje, potenciranje in oklepaje, npr. $25 = 5^2$.

Če si na obeh straneh enačaja števke sledijo v istem vrstnem redu, dobimo *lepo Friedmanovo število*; npr. $127 = -1 + 2^7$.

Štiri ali manj mestnih Friedmanovih števil je 72,
5-mestnih je 772 itn.

Lepih Friedmanovih števil je bistveno manj kot Friedmanovih: dvomestnih ni, samo tri so 3-mestna, 4-mestnih je 11 in 5-mestnih 93.

$$25 = 5^2$$

$$121 = 11^2$$

$$125 = 5^{1+2}$$

$$126 = 6 \cdot 21$$

$$1827 = 21$$

87

$$2048 = 8^4 : 2 + 0$$

$$759375 = (7 - 5 + 9 - 3 + 7)^5$$

$$123456789 = ((86 + 2 \times 7)^5 - 91) / 3^4$$

$$987654321 = (8 \times (97 + 6/2)^5 + 1) / 3^4$$

$$127 = -1 + 2^7$$

$$736 = 7 + 3^6$$

$$1285 = (1 + 2^8) \cdot 5$$

$$3125 = (3^1 + 2)^5$$

$$6455 = (6^4 - 5) \cdot 5$$

Friedmanovi števili sta tudi dve *pandigitalni števili* brez ničle:

$$123456789 = \frac{(86+2\cdot 7)^5 - 91}{3^4} \quad \text{in} \quad 987654321 = \frac{8\cdot(97+\frac{6}{2})^5 + 1}{3^4}$$

.

Entuziasti teorije števil so se poigrali tudi z dolgočasnimi števili in nekatera zapisali kot Friedmanova:

$$11111111111 = \frac{(11-1)^{11} - 1\cdot 1}{11-1-1}$$

$$2222222222222 = \frac{\left(\frac{2(22-2)}{2}\right)^{2^{(2+2)-2}} - 2}{\left(2+\frac{2}{2}\right)^2}$$

$$333333333 = \frac{\left(3\cdot 3+\frac{3}{3}\right)^{3\cdot 3} - \frac{3}{3}}{3}$$

$$44444444444444 = \frac{4\left(\frac{44}{4}-\frac{4}{4}\right)^{4\cdot 4-\frac{4}{4}}}{4+4+\frac{4}{4}}$$

$$5555555555 = \frac{5(5+5)^{5+5} - 5}{5+5-\frac{5}{5}}$$

$$6666666666666666=\frac{6\left(\frac{66-6}{6}\right)^{6+\frac{66-6}{6}}-6}{6+\frac{6+6+6}{6}}$$

$$77777777777777=\frac{7\left(\frac{77-7}{7}\right)^{7+7}-7+7-7}{7+\frac{7+7}{7}}$$

$$88888888888888=\frac{8\left(\frac{88-8}{8}\right)^{8+8-\frac{8+8}{8}}-8}{8+\frac{8}{8}}$$

$$99999999=\left(9+\frac{9}{9}\right)^{9-\frac{9}{9}}-\frac{9}{9}$$

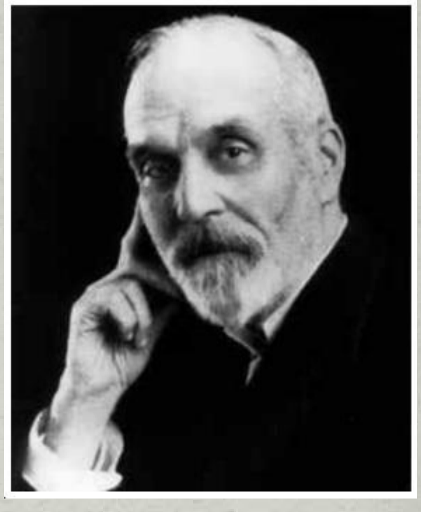
Friedmanova rimska števila

VIII = (V – I) × II (AR)	XVIII = X + (V – I) × II (AR)	XXVII = IX × (X/V + I) (BH)	XXVIII = XX + (V – I) × II (AR)
XXXIII = XI × (X/X + II)	XXXVI = $VI^{XX/X}$	XXXVII = IX × (X/V + I) + X (BH)	XXXVIII = XXX + (V – I) × II (AR)
XLIV = L – V – I^{X}	XLVI = L – V + I^{X}	XLVII = L – X/V – I × I (BH)	XLVIII = XL + (V – I) × II (AR)
XLIX = L – I^{XX}	LVIII = L + (V – I) × II (AR)	LXVIII = LX + (V – I) × II (AR)	LXXIV = L × XV / X – I (BH)
LXXV = L / X × XV (BH)	LXXVI = L / X × XV + I (BH)	LXXVII = L / X × XV + II (BH)	LXXVIII = L / X × XV + III (BH)
LXXXI = $IX^{X \times X/L}$	LXXXII = $IX^{X \times X/L}$ + I	LXXXIII = $IX^{X \times X/L}$ + II	LXXXIV = LX / X × XIV (AF)
LXXXVI = L × XV / X + XI	LXXXVII = L × XV / X + XII	LXXXVIII = LXXX + (V – I) × II (AR)	LXXXIX = X × (X – I^{L}) – X/X
XCIV = C – V – I^{X}	XCVI = C – V + I^{X}	XCVII = C – X/V + I×I	XCVIII = XC + (V – I) × II (AR)
XCIX = C – I^{XX}			

Harvey Friedman (1848), ameriški matematik

Leta 1917 je presenetil z izjavo, da lahko z upoštevanjem Gödlovega ontološkega dokaza o obstoju Boga pokaže, da je matematika popolna v smislu Zermelo Franklovega aksioma.

Henry Ernest Dudenay (1857–1930) se je rodil v Sussexu v Angliji kot drugi od šestih otrok. Bil je zelo navezan na deda, ki je v življenju naredil izvrstno kariero. Od pastirja in matematičnega samouka je napredoval do učitelja, prav tako je bil učitelj njegov oče. Mali Henry in ded sta rada igrala šah, reševala pa sta tudi šahovske uganke. Ko se je mali Henry pri 9 letih že naveličal šahovskih problemov, je začel sestavljati matematične uganke in jih objavljal v lokalnem časopisu. Dudeney, kljub svojemu bistremu umu, po osnovni šoli ni šel na kolidž, ampak je pri 13 letih postal pisar v državni upravi, kjer je ostal do upokojitve.



Čeprav je bil brez vsake formalne matematične izobrazbe, je kar 30 let pod psevdonimom Sphinx objavljal »matematične orehe« v reviji Strand Magazine.

Poleg amaterskega ukvarjanja z matematiko, je bil Dudeney tudi glasbeni navdušenec: odlično je igral klavir in orgle, posebej pa sta ga zanimali stara cerkvena glasba in orgelske koralne predigre.

Leta 1907 je Dudeney izdal prvo knjigo ugank *Canterbury puzzles* (aluzija na znano Chaucerjevo knjigo Canterburijske zgodbe), ki jo je delno tudi sam ilustriral. Naslednja knjiga *Amusements in Mathematics* je izšla leta 1917 in vsebuje kar 435 ugank, potem sta leta 1925 in 1926 izšli *The World's Best Word Puzzles* (najboljše svetovne uganke) in *Modern Puzzles*. Zadnji dve knjigi ugank sta izšli že po njegovi smrti: *A Puzzle-Mine* (Rudnik ugank) in *Puzzles and Curious Problems* (Uganke in nenavadni problemi, 1931).

Dudeney in Loyd sta si dalj časa dopisovala in si izmenjavala ideje. Kasneje sta se povsem razšla, saj je Dudney Loyda obtožil, da je precej njegovih ugank objavil pod svojim imenom. Sicer je Sam Loyd (1841–1911) veliko svojega dela posvetil šahu in šahovskim ugankam. Bil je 15. na ameriški šahovski lestvici, na svetovnem prvenstvu v Parizu leta 1876 pa se ni kaj dobro odrezal. Po njegovi smrt je njegov sin leta 1914 izdal obsežno delo očetovih šahovskih ugank *Cyclopedia of 5000 Puzzles*.

- Leta 1907 je Henry Ernest Dudeney objavil naslednjo uganko o eničnih številih:

- *Pravijo, da so se pred mnogo leti v vasi St. Edmondsburry miši neverjetno namnožile. Zato je opat bližnjega samostana pozval ljudi, da zberejo kolikor je mogoče veliko mačk, da bodo iztrebile številne zajedavce.*
- *Ljudje so stopili skupaj, zbrali veliko mačk in konec leta so preštelji natanko* 1 111 111 *ujetih miši, vsak mačkon pa je ujel enako število miši in to več kot je bilo vseh mačkonov skupaj.*

- ***Vprašanje se torej glasi: Koliko je bilo miši in koliko mačkonov?***

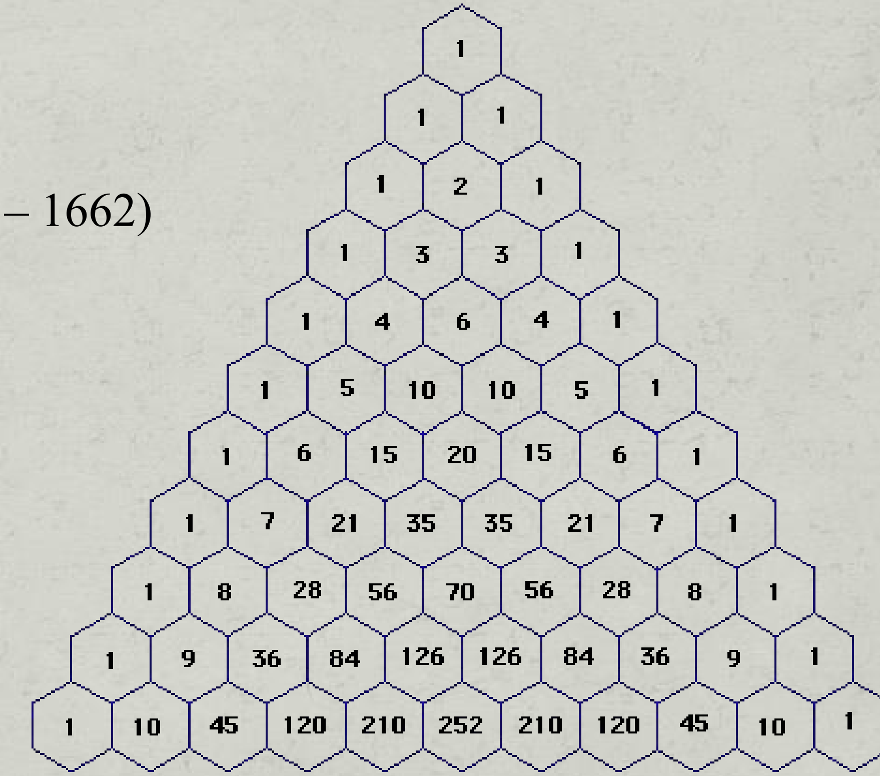
- V Dudneyevih časih je bila to zelo težka naloga, saj nam malo globlji premislek pove, da je treba število 1 111 111 zapisati kot produkt natanko dveh faktorjev.

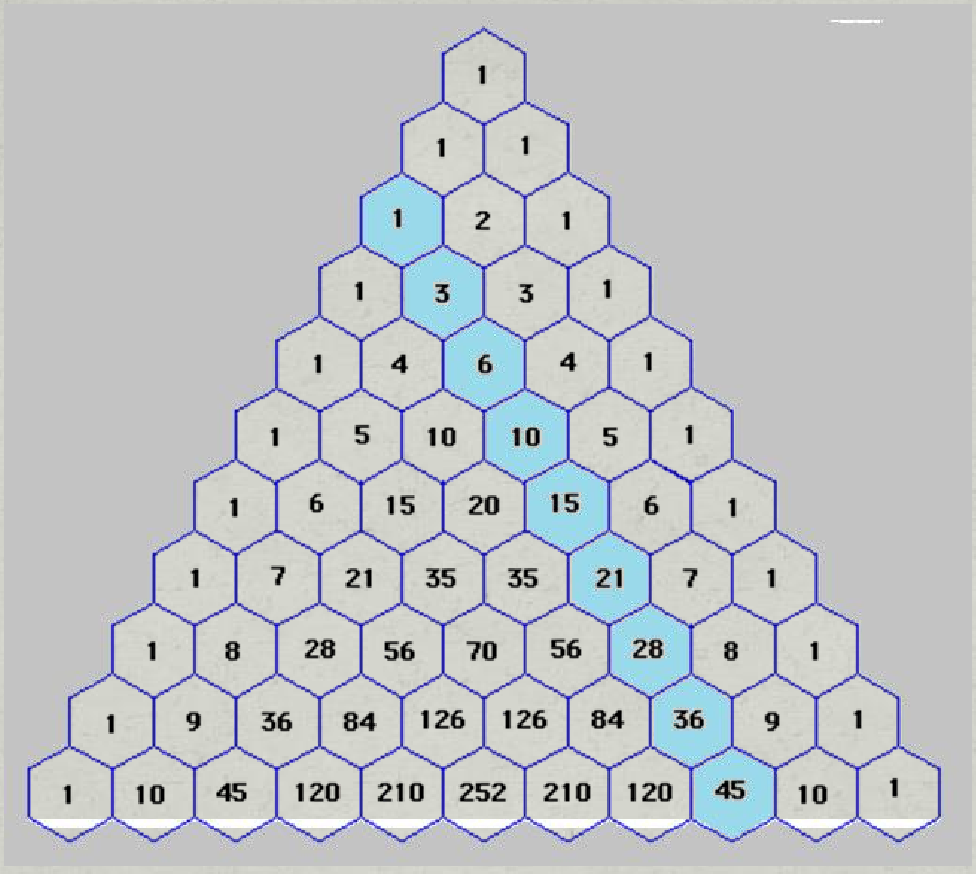
- Danes je to z uporabo računalniških programov »mačji kašelj«. Če se poslužimo brezplačnega programa GeoGebra (ime naj vas ne zavede, saj vsebuje tudi aritmetične in algebrske ukaze) in uporabimo ukaz **PraštevilskiRazcep,** v trenutku dobimo rezultat **239 · 4649**.

- Torej so vaščani zbrali 239 mačk od katerih je vsaka pojedla 4649 miši (kar dobra gostija ).

Pascalov trikotnik in figurativna števila

Blaise Pascal (1623 – 1662)

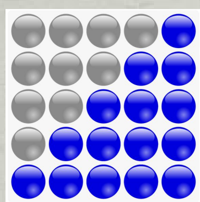




trikotniška števila $T_n = \binom{n+1}{2}$

Možnost raziskovanja

$$T_n + T_{n+1} = (n+1)^2$$



$$T_{n+1}^2 - T_n^2 = (n+1)^3$$

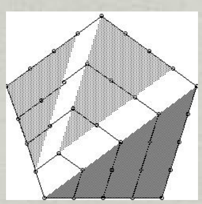
$$3T_n + T_{n+1} = T_{2n+1}$$

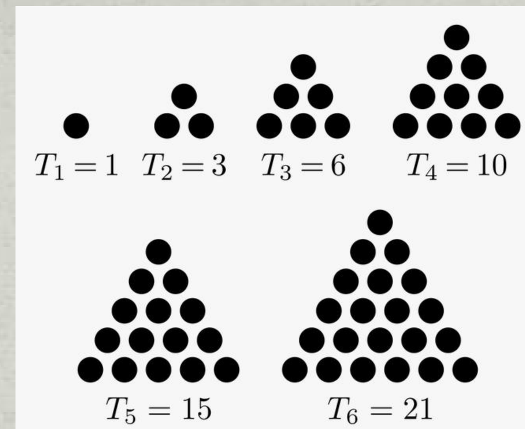
$$3T_n + T_{n-1} = T_{2n}$$

$$T_{n-1},+ 6T_n + T_{n+1} = 8T_n + 1 = (2n+1)^2$$

,

$$2 \cdot T_n + T_{n-1} = P_n$$





Zastavljanje vprašanj

1. Ali je eniško število lahko praštevilo?
2. Kako je z deljivostjo eniških števil?
3. Ali je eniško število lahko trikotniško?

Odgovori:

1. Lahko. Pri določanju si pomagamo s tehnologijo.
2. Odgovorimo lahko že z znanjem osnovnošolske matematike.
3. Pomagamo si s tehnologijo.

FROM THE MAKERS OF WOLFRAM LANGUAGE AND MATHEMATICA

WolframAlpha

Diabolično (vražje) število – prav nič dolgočasno

1. $666 = 6 + 6 + 6 + 6^3 + 6^3 + 6^3$
2. $666 = 1^6 - 2^6 + 3^6$
3. $666 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2$
4. $666 = 313 + 353$
5. $666 = 2x3x3x37$ in $6 + 6 + 6 = 2 + 3 + 3 + 3 + 7$
6. $666^2 = 443556$ in $666^3 = 295408296$

   $(4^2 + 4^2 + 3^2 + 5^2 + 5^2 + 6^2) +$

   $(2 + 9 + 5 + 4 + 0 + 8 + 2 + 9 + 6) = 666$
7. $1 + 2 + 3 + 4 + 567 + 89 = 666$

   $123 + 456 + 78 + 9 = 666$
8. $666 = 9 + 87 + 6 + 543 + 21$.

Hvala za vašo pozornost in dodatna vprašanja

KUPM 2024

6. KONFERENCA O UČENJU IN POUČEVANJU MATEMATIKE

Laško, 11. in 12. november 2024

6. konferenca o učenju
in poučevanju matematike
KUPM 2024

ZAVOD REPUBLIKE SLOVENIJE ZA ŠOLSTVO

REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA VZGOJO IN IZOBRAŽEVANJE

I FEEL SLOVENIA

Sofinancira Evropska unija