

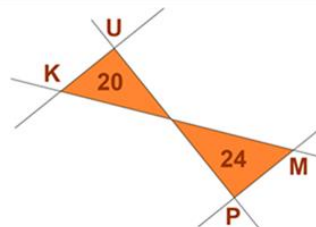
Risba kot rešitev aritmetične naloge

Manja Podgoršek Mesarec

Alenka Lipovec, UM PEF

Laško, 11. in 12. november 2024

6. konferenca o učenju
in poučevanju matematike
KUPM 2024



ZRSŠ
ZAVOD
REPUBLIKE SLOVENIJE
ZA ŠOLSTVO



REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA VZGOJO IN IZOBRAŽEVANJE

I FEEL
SLOVENIA



Sofinancira
Evropska unija

Vizualne reprezentacije

- Pri pouku matematike pogosto uporabljamo vizualne elemente za razumevanje in učenje matematičnih pojmov.
- Vizualne reprezentacije matematičnih pojmov so vrste predstavitev, ki se uporabljajo pri matematiki in njenem poučevanju.
- Uporaba v različnih kontekstih:
 - kot statične vizualne reprezentacije (risbe, slike, sheme, prikazi ...),
 - dinamične vizualne reprezentacije (videi, apleti ...),
 - kontekstu dejanske/konkretne oz. enaktivne reprezentacije.

Namen predstavljene raziskave

- Vizualne reprezentacije matematičnih pojmov so bile pri dosedanjih raziskavah uporabljene predvsem na dva načina:
 - a) risba je le orodje pridobivanja rešitve (aritmetika),
 - b) risba je rešitev (geometrija).
- Raziskovanje učenčeve risbe kot reprezentacije izbranih aritmetičnih pojmov, kar pomeni, da risba predstavlja t. i. raziskovalno orodje.

Raziskovalne hipoteze

Predpostavljamo, da je mogoče z učenčeve risbe matematičnega pojma razbrati globino razumevanja matematičnega pojma.

- H1: Predpostavljamo, da bo skozi podane učenčeve risbe mogoče pridobiti vpogled v stopnjo učenčevega matematičnega znanja podanega matematičnega pojma.
- H2: Predpostavljamo, da bo obstajala povezava med podanim matematičnim pojmom ter ustreznostjo prikazane vizualne reprezentacije (*ustreznost risbe*).
- H3: Predpostavljamo, da bo mogoče zaznati razliko v pogostosti uporabe proceduralnega in konceptualnega tipa matematičnega znanja (*usmerjenost risbe*).
- H4: Predpostavljamo, da bodo vizualne reprezentacije, skozi katere bo mogoče razbrati konceptualni tip matematičnega znanja, v najvišji meri vodile do pravilno podanega rezultata (*pravilnost risbe*).
- H5: Predpostavljamo, da bodo verbalno podani opisi, ki jih bodo podali učenci ob ogledu ponujenih vizualnih reprezentacij, predstavljali dodano vrednost z vidika učenčeve interpretacije prikazanega, kar bo hkrati ponudilo dodaten vpogled v učenčevo razumevanje matematičnih pojmov.

Raziskovalna metoda in vzorec

- Uporabljena kombinacija deskriptivne in kavzalno-neeksperimentalna metode empiričnega pedagoškega raziskovanja.
- Raziskava temelji na dveh ločenih vzorcih:
 - 1272 šestošolcev (preizkus znanja s podajanjem risb ob štirih določenih številskih izrazih) v raziskavi (1),
 - 32 šestošolcev (polstrukturirani intervju s prikazom kod risb raziskave (1) v raziskavi (2)).

Postopki zbiranja podatkov

- V raziskavi (1) so bili podatki zbrani s preizkusom znanja.
 - Obsegal je 4 naloge, ki so od učencev zahtevale, da naslednje številske izraze ponazorijo z risbo:
 - odštevanje ($17 - 9$),
 - številski izraz z oklepaji ($3 \cdot (4 + 5)$),
 - ulomek kot operator ($\frac{3}{5}$ od 15) in
 - potenca (2^3).

Narišite risbe, ki ponazarjajo:

$17 - 9$	$\frac{3}{5}$ od 15
$3 \cdot (4 + 5)$	2^3

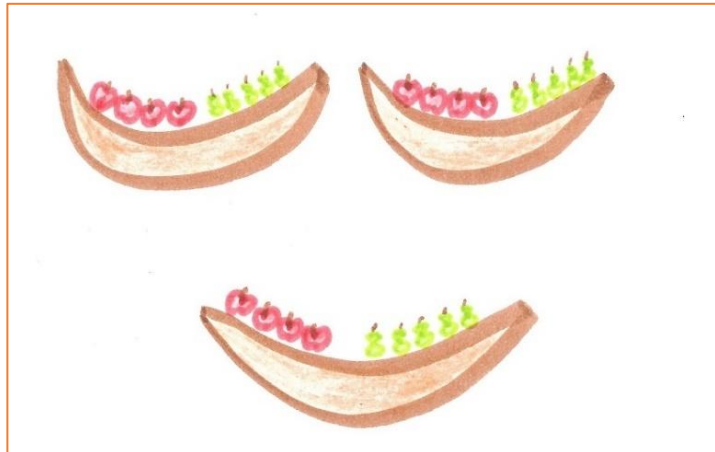
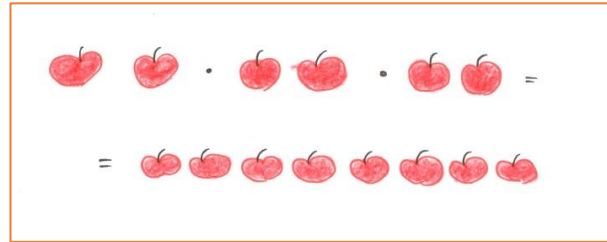
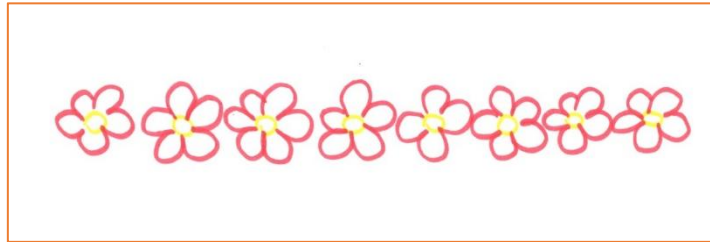
Postopki zbiranja podatkov

- V raziskavi (2) so bili podatki zbrani na način izvedbe polstrukturiranih intervjujev na podlagi predhodnega vprašalnika za izbor učencev.
 - Vprašalnik je bil povzet po vprašalniku za učenke in učence iz raziskave TIMSS 2015 (odnos do matematike), dodan mu je bil tudi del s podatkom o oceni in spolu učenca.
 - Polstrukturiran intervju je bil izveden na način:
 - prikaza dveh primerov risb za vsako nastalo kodo vsakega številskega izraza ter
 - prikaza štirih risb za vsak številski izraz, pri čemer je ena risba predstavljala napačen številski izraz in jo je moral učenec izločiti.
 - Dodatno smo pri učencih preverjali pogostost uporabe risb v šoli in doma ter njihovo samooceno.

Rezultati

- Zaradi strukture so rezultati razdeljeni na dve ključni podpoglavji:
 - rezultati raziskave (1), ki so prikazani tabelarično z dodanimi poustvarjenimi učenčevimi reprezentacijami;
 - rezultati raziskave (2), ki so prikazani tabelarično z dodanimi pridobljenimi učenčevimi ustnimi odgovori.

Rezultati (1): Kategorije reprezentacij



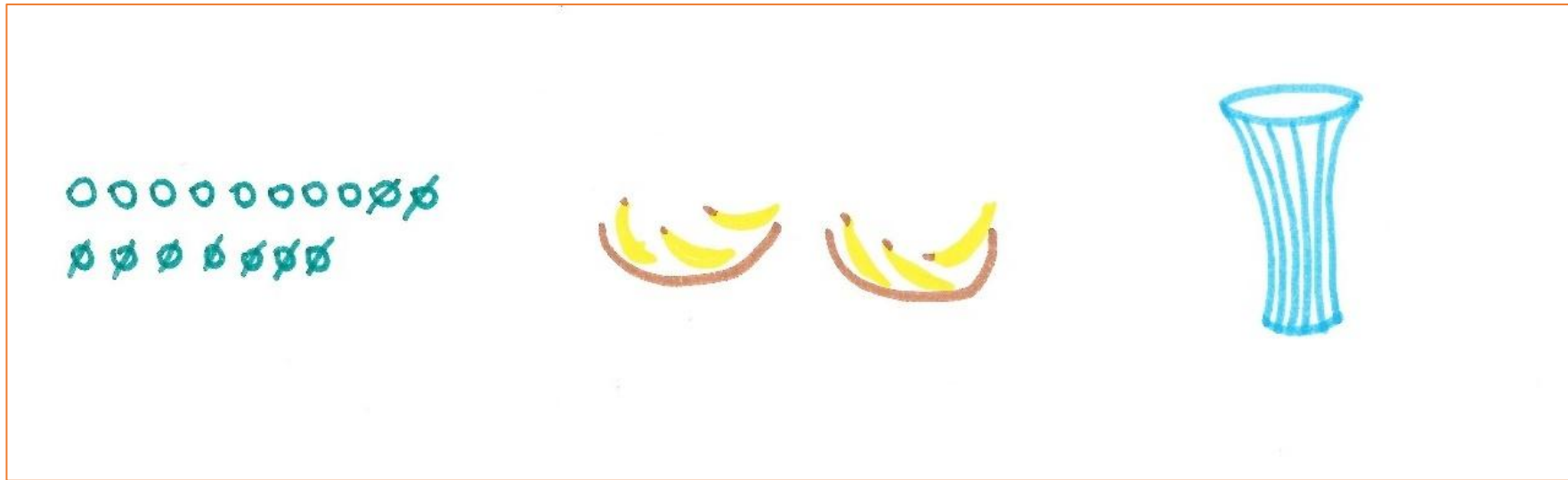
Rezultati (1): Kategorije reprezentacij

Tabela 1: Izid χ^2 -preizkusa razlik v prikazu reprezentacij podanih matematičnih pojmov glede na kategorije reprezentacij

	Rezultat		Prepletanje		Odnosi		Ilustracija		Drugo		Skupaj	
	f	f %	f	f %	f	f %	f	f %	f	f %	f	f %
Odštevanje	137	10,8	195	15,3	556	43,7	253	19,9	131	10,3	1272	100,0
Številski izraz z oklepaji	318	25,0	266	20,9	218	17,1	306	24,1	164	12,9	1272	100,0
Ulomek kot operator	133	10,5	96	7,6	504	39,6	157	12,3	382	30,0	1272	100,0
Potenca	335	26,3	425	33,4	243	19,1	113	8,9	156	12,3	1272	100,0
Skupaj	923	18,1	982	19,3	1521	29,9	829	16,3	833	16,4	5088	100,0

$\chi^2 = 942,575$, $P = 0,000$, Cramerjev $V = 0,248$

Rezultati (1): Ustreznost



Slika 1: Risba ustrezne risbe pri odštevanju (levo), neustrezne risbe pri potenci (na sredini) in drugo (desno) pri ulomku kot operatorju



Rezultati (1): Ustreznost

Tabela 2: Izid χ^2 -preizkusa razlik v prikazu reprezentacij podanih matematičnih pojmov glede na ustreznost

	Ustrezna risba		Neustrezna risba		Drugo		Skupaj	
	f	f %	f	f %	f	f %	f	f %
Odštevanje	887	69,7	51	4,0	334	26,3	1272	100,0
Številski izraz z oklepaji	762	59,9	76	6,0	434	34,1	1272	100,0
Ulomek kot operator	519	40,8	342	26,9	411	32,3	1272	100,0
Potenca	618	48,6	394	31,0	260	20,4	1272	100,0
Skupaj	2786	54,7	863	17,0	1439	28,3	5088	100,0

$\chi^2 = 601,946$, $P = 0,000$, Cramerjev $V = 0,243$

Rezultati (1): Pravilnost



Slika 2: Risba pravilnega rezultata (levo), napačnega rezultata (na sredini) in kategorija drugo (desno) pri odštevanju

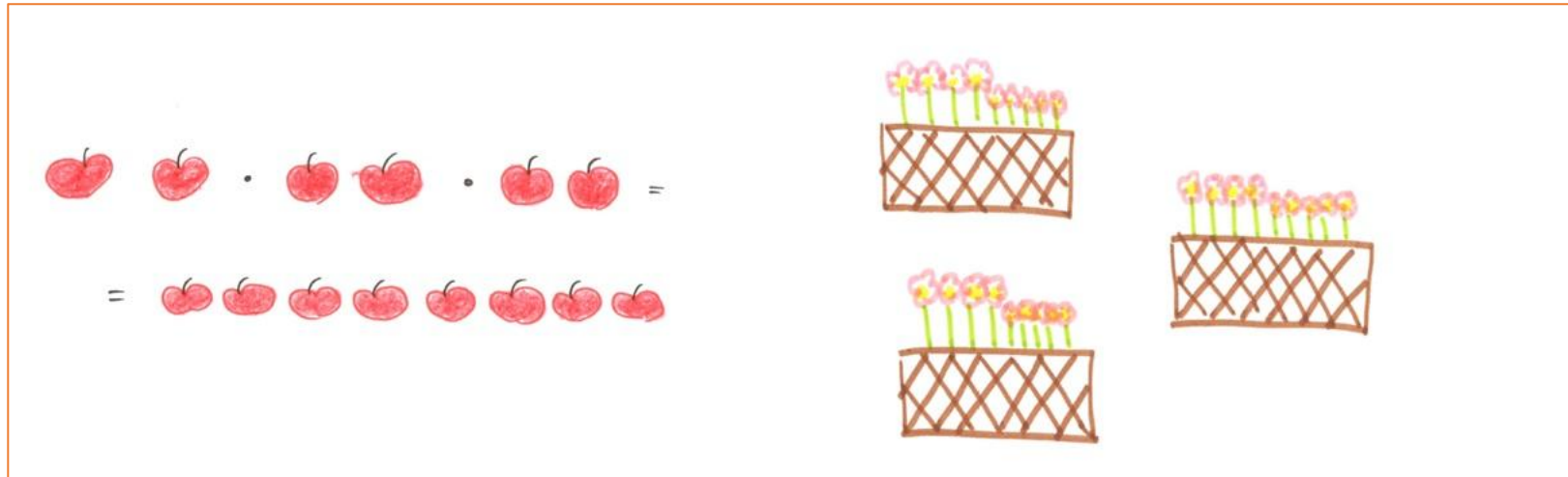
Rezultati (1): Pravilnost

Tabela 3: Izid χ^2 -preizkusa razlik v prikazu reprezentacij podanih matematičnih pojmov glede na pravilnost

	Pravilen rezultat		Napačen rezultat		Drugo		Skupaj	
	f	f %	f	f %	f	f %	f	f %
Odštevanje	825	64,9	71	5,6	376	29,5	1272	100,0
Številski izraz z oklepaji	689	54,2	96	7,5	487	38,3	1272	100,0
Ulomek kot operator	320	25,2	405	31,8	547	43,0	1272	100,0
Potenca	408	32,1	403	31,7	461	36,2	1272	100,0
Skupaj	2242	44,1	975	19,2	1871	36,7	5088	100,0

$\chi^2 = 753,984$, $P = 0,000$, Cramerjev $V = 0,272$

Rezultati (1): Usmerjenost



Slika 3: Proceduralna risba (levo) pri potenci in konceptualna risba (desno) pri številskem izrazu z oklepaji



Rezultati (1): Usmerjenost

Tabela 4: Izid χ^2 -preizkusa razlik v prikazu reprezentacij podanih matematičnih pojmov glede na usmerjenost

	Proceduralna		Konceptualna		Drugo		Skupaj	
	f	f %	f	f %	f	f %	f	f %
Odštevanje	332	26,1	556	43,7	384	30,2	1272	100,0
Številski izraz z oklepaji	548	45,9	218	17,1	470	36,9	1272	100,0
Ulomek kot operator	531	41,7	281	22,1	460	36,2	1272	100,0
Potenca	970	76,3	33	2,6	269	21,1	1272	100,0
Skupaj	2417	47,5	1088	21,4	1583	31,3	5088	100,0

$\chi^2 = 936,467$, $P = 0,000$, Cramerjev $V = 0,303$

Rezultati (1): Pravilnost in usmerjenost

Tabela 5: Izid χ^2 -preizkusa razlik med pravilnostjo izbranih matematičnih pojmov in usmerjenostjo risb

Usmerjenost		Proceduralno		Konceptualno/ pojmovno		Ni mogoče prepoznati		Skupaj	
		f	f %	f	f %	f	f %	f	f %
Pravilnost									
Odštevanje	Pravilen rezultat	272	81,9	518	93,2	35	9,1	825	64,9
	Napačen rezultat	60	18,1	38	6,8	349	90,9	447	35,1
	Skupaj	332	100,0	556	100,0	384	100,0	1272	100,0
$\chi^2 = 761,434, P = 0,000, \text{Cramerjev } V = 0,774$									
Številski izraz z oklepaji	Pravilen rezultat	475	81,3	207	95,0	7	1,5	689	54,2
	Napačen rezultat	109	18,7	11	5,0	463	98,5	583	45,8
	Skupaj	584	100,0	218	100,0	470	100,0	1272	100,0
$\chi^2 = 845,049, P = 0,000, \text{Cramerjev } V = 0,815$									
Usmerjenost		Proceduralno		Konceptualno/ pojmovno		Ni mogoče prepoznati		Skupaj	
		f	f %	f	f %	f	f %	f	f %
Pravilnost									
Ulomek kot operator	Pravilen rezultat	103	19,4	208	74,0	9	2,0	320	25,2
	Napačen rezultat	428	80,6	73	26,0	451	98,0	952	74,8
	Skupaj	531	100,0	281	100,0	460	100,0	1272	100,0
$\chi^2 = 497,211, P = 0,000, \text{Cramerjev } V = 0,625$									
Potenca	Pravilen rezultat	376	38,8	30	90,9	2	0,7	408	32,1
	Napačen rezultat	594	61,2	3	9,1	267	99,3	864	67,9
	Skupaj	970	100,0	33	100,0	269	100,0	1272	100,0
$\chi^2 = 193,546, P = 0,000, \text{Cramerjev } V = 0,390$									

Raziskava (1): Kode, kategorije in usmerjenost

Usmerjenost	Kategorije		Kode			
			Odštevanje	Številski izraz z oklepaji	Ulomek kot operator	Potenca
Proceduralna	Rezultat	Simbolni	Številka 8	Številka 27	Številka 9	Številka 8
		Slikovni	8 predmetov	27 predmetov	9 predmetov	8 predmetov
	Prepletanje		Slikovni prikaz objektov je prepleten s prikazom matematičnih simbolov (npr. ulomkova črta)			

The image shows six panels illustrating mathematical concepts:

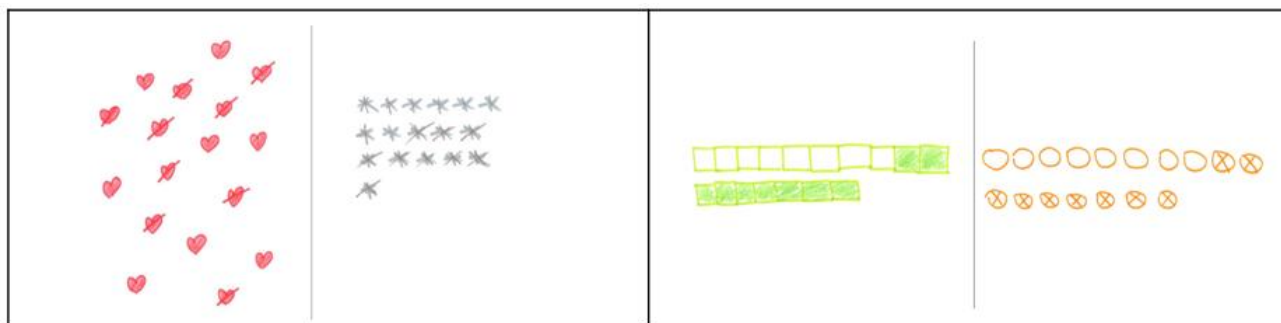
- Top-left:** Two baskets of flowers, one above the other.
- Top-middle:** A grid of 8 pears arranged in two rows of four.
- Top-right:** A binary tree diagram with a root node and several leaf nodes.
- Middle-left:** A subtraction problem using vertical bars: $11111111 - 1111111 = 1111111$.
- Middle-right:** A multiplication problem using stars: $3 \times 3 = 9$.
- Bottom-right:** A multiplication problem using carrots: $3 \times 3 = 9$.

Tipa ni mogoče prepoznati

Ilustracija

Številski izraz je »okrašen«

Raziskava (2): Odnosi (odštevanje)



Slika 8: Prikazani pari reprezentacij odnosov pri odštevanju z vidnim desetiškim sistemom (desno) in brez vidnega desetiškega sistema (levo)

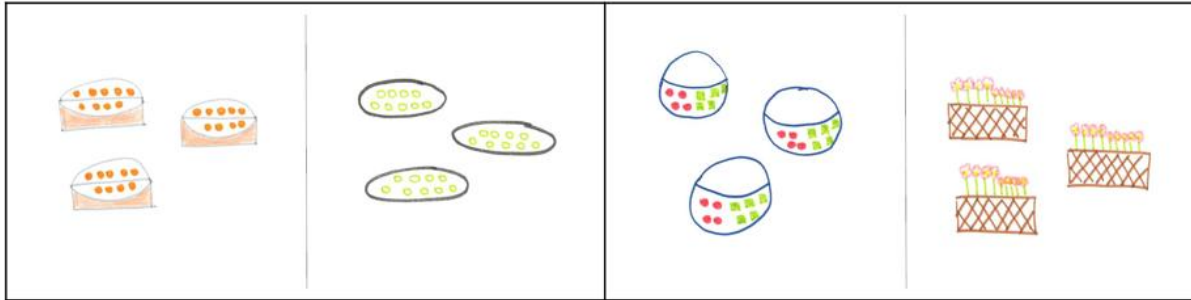
- Učenci so podali odgovor na tri načine:
 - kot risbo in simbol (npr. »vidim 17 srčkov«),
 - kot opis pravilnega izraza (npr. »vidim 17 srčkov, od katerih je odšteti 9 srčkov, kar vem, ker so prečrtani, zato ostane 8 srčkov, ki so neprečrtani, kar lahko zapišem z računom $17 - 9 = 8$ «),
 - kot opis napačnega izraza (npr. »vidim 9 prečrtanih srčkov, 8 srčkov je neprečrtanih, to bi lahko zapisal kot $8 - 9$ ali $9 - 8$ «).

Raziskava (2): Odnosi (odštevanje)

Tabela 6: Pogostost pojavljanja odgovorov pri odnosih pri odštevanju ter izid χ^2 -preizkusa razlik med učenčevim odnosom ter učenčevo oceno in opisom

	Risba in simbol		Opis pravilnega izraza		Opis napačnega izraza		Skupaj		Povezava med učenčevim odnosom in opisom	Povezava med učenčevo oceno in opisom
	f	f%	f	f%	f	f%	f	f%		
Viden des. sistem	1	3,1	23	71,9	8	25,0	32	100,0	$\chi^2_{lr}=3,224,$ P = 0,521	$\chi^2_{lr}=16,403,$ P = 0,003
Ni viden des. sistem	7	21,9	16	50,0	9	28,1	32	100,0	$\chi^2_{lr}=1,752,$ P = 0,781	$\chi^2_{lr}=12,440,$ P = 0,014

Raziskava (2): Odnosi (številski izraz z okl.)



Slika 9: Prikazani pari reprezentacij odnosov pri številskem izrazu z oklepaji s ponazoritvijo različnih seštevancev glede na lego (levo) in s ponazoritvijo različnih seštevancev glede na velikost, obliko in/ali barvo

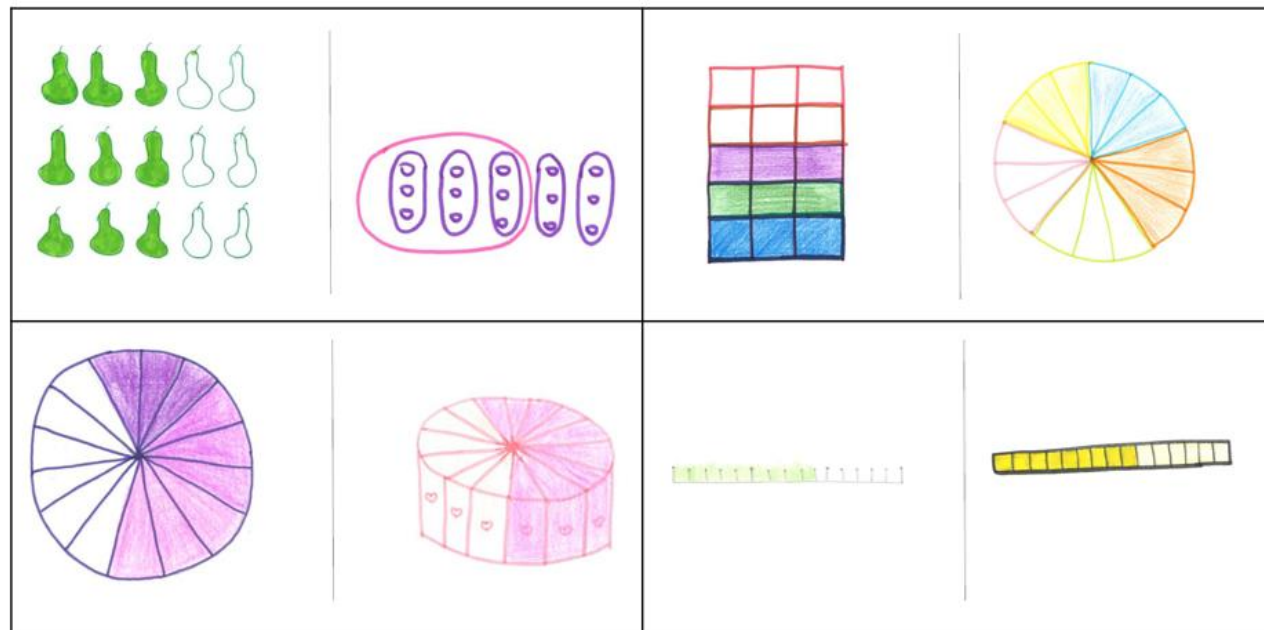
- Učenci so podali odgovor na tri načine:
 - kot risbo in simbol (npr. »vidim 27 pikic v škatlah«),
 - kot opis pravilnega izraza (npr. »vidim 3 škatle, v vsaki je 9 pikic«), ki je pri ponazoritvi različnih seštevancev popolna, kadar učenec razdeli 9 elementov na 4 + 5 elementov (npr. »vidim 4 velike rože in 5 majhnih rož v enem koritu, torej je v enem koritu 9 rož, krat 3, ker imamo 3 enaka korita«),
 - kot opis napačnega izraza (npr. »vidim izraz $9 \cdot 9 \cdot 9$ «).

Raziskava (2): Odnosi (številski izraz z okl.)

Tabela 7: Pogostost pojavljanja odgovorov pri odnosih pri številskem izrazu z oklepaji ter izid χ^2 -preizkusa razlik med učenčevim odnosom ter učenčevo oceno in opisom

	Risba in simbol		Opis pravilnega izraza		Opis napačnega izraza		Skupaj		Povezava med učenčevim odnosom in opisom	Povezava med učenčevo oceno in opisom
	f	f %	f	f %	f	f %	f	f %		
Ponazoritev glede na lego	2	6,3	25	78,1	5	15,6	32	100,0	$\chi^2_{lr}=3,567$, P = 0,468	$\chi^2_{lr}=10,436$, P = 0,034
Ponazoritev glede na vel., obliko, barvo	1	3,1	8 (delno)	25,5	1	3,1	32	100,0	$\chi^2_{lr}=6,581$, P = 0,361	$\chi^2_{lr}=13,019$, P = 0,043
			22 (popolno)	68,8						

Raziskava (2): Odnosi (ulomek kot operator)



Slika 10: Prikazani pari reprezentacij odnosov pri ulomku kot operatorju za aritmetični model (levo zgoraj), geometrijski model z vidnimi petinami (desno zgoraj), geometrijski model brez vidnih petin (levo spodaj) ter merljivi model (desno spodaj)

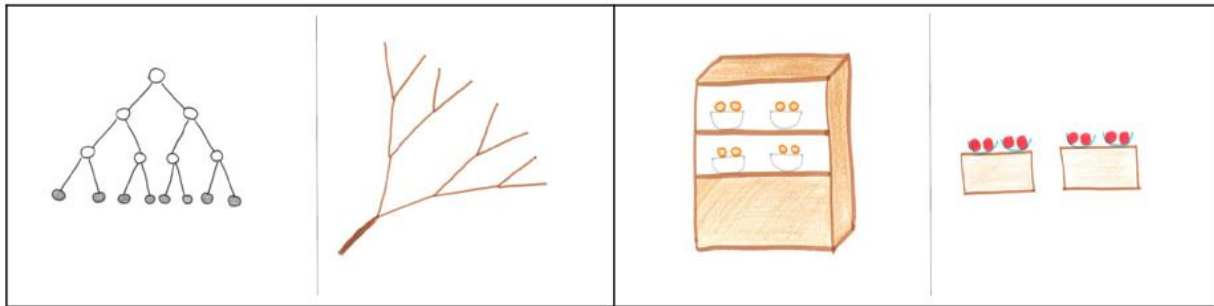
- Učenci so podali odgovor na tri načine:
 - kot risbo in simbol (npr. »vidim torto s šestimi srčki«),
 - kot opis pravilnega izraza, ki je lahko delno ustrezen (npr. »vidim 9/15 zelenih hrušk«) ali popolno ustrezen (npr. »vidim 3/5 pobarvanih kock od 15 kock«),
 - kot opis napačnega izraza (npr. »vidim 3 rumene, 3 modre, 3 oranžne in 6 nepobarvanih likov v krogu«).

Raziskava (2): Odnosi (ulomek kot operator)

Tabela 8: Pogostost pojavljanja odgovorov pri odnosih pri številskem izrazu z oklepaji ter izid χ^2 -preizkusa razlik med učenčevim odnosom ter učenčevo oceno in opisom

	Risba in simbol		O p i s p r a v i l n e g a i z r a z a		O p i s n a p a č n e g a i z r a z a		Skupaj		Povezava m e d učenčevim odnosom in opisom	Povezava m e d učenčevo oceno in opisom
	f	f %	f	f %	f	f %	f	f %		
Geom. model (ni vidnih petin)	0	0,0	1 0 (delno)	31,3	22	68,8	32	100,0	$\chi^2_{lr}=0,199$, P = 0,905	$\chi^2_{lr}=6,607$, P = 0,037
Merljivi model	1	3,1	6 (delno)	18,8	25	78,1	32	100,0	$\chi^2_{lr}=4,578$ P = 0,333	$\chi^2_{lr}=10,149$, P = 0,038

Raziskava (2): Odnosi (potenca)



Slika 11: Prikazani pari reprezentacij odnosov pri potenci z drevesnim prikazom (levo) ugnezdeno strukturo (desno)

- Učenci so podali odgovor na tri načine:
 - kot risbo in simbol (npr. »vidim 7 nepobarvanih in 8 pobarvanih krogcev«),
 - kot opis pravilnega izraza, ki je lahko delno ustrezen (npr. »vidim krog, iz katerega gresta dve veji, kar pomeni, da dobim dve novi veji z novima dvema krogoma, potem se iz vsakega kroga spet naredi enako, po dve novi vej z dvema krogoma in tako naprej, da dobim 8 pobarvanih krogov, kar me spominja na $1+1=2, 2+2=4, 4+4=8$ «) ali popolno ustrezen (npr. »vidim izraz $2 \cdot 2 \cdot 2$, kar je enako 8, to je potenca«),
 - kot opis napačnega izraza (npr. »vidim 15 vej, ena je debelejša od ostalih, kar pomeni, da jo lahko odštejem, zato vidim 14 vej«).

Raziskava (2): Odnosi (potenca)

Tabela 9: Pogostost pojavljanja odgovorov pri odnosih pri potenci ter izid χ^2 -preizkusa razlik med učenčevim odnosom ter učenčevo oceno in opisom

	Risba in simbol		Opis pravilnega izraza		Opis napačnega izraza		Skupaj		Povezava med učenčevim odnosom in opisom	Povezava med učenčevo oceno in opisom
	f	f %	f	f %	f	f %	f	f %		
Drevesni prikaz	19	54,4	6 (delno)	18,8	6	18,8	32	100	$\chi^2_{lr}=9,336,$ P = 0,156	$\chi^2_{lr}=9,903,$ P = 0,129
			1 (popolno)	3,1						
Ugnedena struktura	1	3,1	3 (delno)	9,4	26	81,3	32	100	$\chi^2_{lr}=8,148,$ P = 0,227	$\chi^2_{lr}=8,392,$ P = 0,211
			2 (popolno)	6,3						

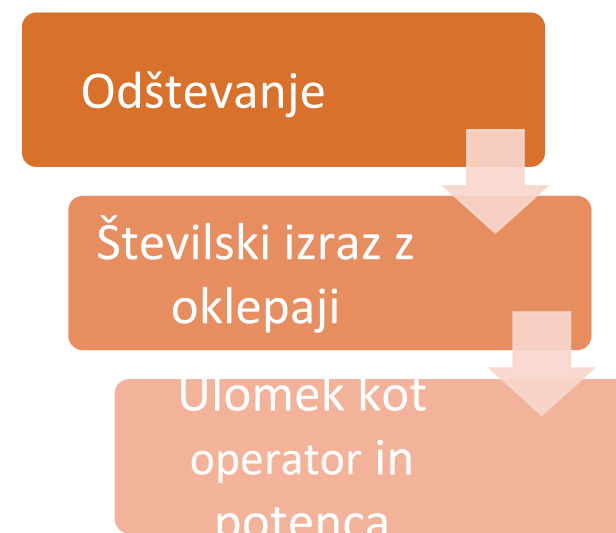
Razprava: Ustreznost

- Razlike v ustreznosti glede na podani matematični pojem (H2).
- Abstraktnost pojma (Mitchelmore in White, 2004).
- Izkušnje z določenim matematičnim pojmom (Yilmaz in Argun, 2018).
- Povezava z UN (Žakelj idr., 2011).



Razprava: Pravilnost

- Primer odštevanja del UN za 1. razred (Žakelj idr., 2011).
- Ulomek sodi med zahtevnejša konceptualna znanja (Kavkler, 2011).
 - Težave pri računskih operacijah z ulomki imajo tudi učitelji (npr. Copur-Gencturk in Doleck, 2021; Isik in Kar, 2012; Siegler in Lortie-Forgues, 2015)
- Potenca:
 - učenje postopkov in formul brez razumevanja (Confrey in Smith, 1995),
 - ponavljajoče množenje izbranega števila (Davis, 2009).
- Pedagoško znanje vsebine in matematično znanje za poučevanje v kombinaciji z učiteljevim notranjim lokusom kontrole (Lipovec in Podgoršek Mesarec, 2021).



Razprava: Usmerjenost

- Matematični koncepti bodočih učiteljev razrednega pouka so bolj proceduralni kot konceptualni (Özpinar in Arslan, 2022).
- Potenca v najvišjem deležu prikazana na način prepoznave proceduralnega tipa znanja.
- Odštevanje v najvišjem deležu prikazano na način prepoznave konceptualnega tipa znanja.
- Konceptualni tip znanja se lahko razvije s pomočjo več ponovitev določenega matematičnega pojma v različnih variacijah (Ombay in Roble, 2020).

Proceduralno
znanje (1/2)

H3

Konceptualno
znanje (1/5)

Razprava: Pravilnost in usmerjenost

- Delež pravih risb je bil pri vseh matematičnih pojmi višji pri konceptualni usmerjenosti risb (H4).
- Pri ulomku kot operatorju in potenci je bil zaznan večji delež napačnih risb pri proceduralni usmerjenosti risb.
- Proceduralno in konceptualno znanje:
 - prej konceptualno znanje, kasneje proceduralno, kar vodi do konceptualnega znanja; gre za kontinuum znanja, ne dve skrajni točki (Hurrell, 2021);
 - učiteljev tip poučevanja kratkoročno nima vpliva (Bojri idr., 2021).

Razprava: Stopnja razumevanja

- Kvalitativna vsebinska analiza: rezultat, prepletanje, **odnosi**, ilustracija in drugo.
- **Shematske** in slikovne reprezentacije (Hegarty in Kozhevnikov, 1999).
- Risba kot raziskovalno orodje za vpogled v stopnjo matematičnega razumevanja učenca (H1).

Usmerjenost	Kategorije		Kode			
			Odštevanje	Številski izraz z oklepaji	Ulomek kot operator	Potenca
Proceduralna	Rezultat	Simbolni	Številka 8	Številka 27	Številka 9	Številka 8
		Slikovni	8 predmetov	27 predmetov	9 predmetov	8 predmetov
	Prepletanje	Slikovni prikaz objektov je prepleten s prikazom matematičnih simbolov (npr. ulomkova črta)				
Konceptualna	Odnosi		Razporeditev glede na mestnovrednostni koncept	Ponazoritev različnih seštevancev	Aritmetični model	Drevesni prikaz
			Naključna razporeditev	Brez ponazoritve različnih seštevancev	Geometrijski model Merljivi model	Ugnezdena struktura
Tipa ni mogoče prepoznati	Ilustracija		Številski izraz je »okrašen« s slikovnimi dodatki.			

Razprava: Verbalno podani opisi

- Ilustracija
 - Dekorativne risbe ne vplivajo na dosežke, bolj v vlogi distrakcije (Lindner, 2020).
 - Slikovne reprezentacije zavirajo sposobnost reševanja mat. problemov (Hegarty in Kozhevnikov, 1999).
- Rezultat
 - Odmik od kratkih, enoznačnih odgovorov k opisom → prilagoditev učencev (Collie in Martin, 2017).
- Prepletanje
 - Najbolj prepoznavna povezava s šolsko matematiko.
- Odnosi
 - V višji meri jih prepoznavajo učno uspešnejši učenci.
 - Konceptualno poučevanje učencev ima pozitiven vpliv na dosežke in odnos do matematike (Husein in Csíkos, 2023).
- Skladnost z našo klasifikacijo pridobljenih reprezentacij kot rezultat raziskave (1) (H5).

Razprava: Priporočila za pouk

- Matematične aktivnosti, ki vključujejo risanje, so zasnovane na podlagi matematičnega znanja učencev.
- Samostojno oblikovanje risb učencev brez učiteljevih usmeritev.
- Risbe naj učitelji ne vrednotijo kot pravilne oz. napačne.
- Povratna informacija učitelju za načrtovanje pouka (individualizacija in diferenciacija).
- Priložnosti za razlago o narisanim.
- Razširitev aktivnosti na zapis besedilne naloge o/ob risbi.

Razprava: Priporočila za pouk

- Odštevanje (tudi seštevanje): prikaz razporeditve elementov z upoštevanjem mestne vrednosti.
- Številski izraz z oklepaji: uporaba različnih predmetov za različna števila.
- Ulomek kot operator: uporaba različnih vrst modelov.
- Potenca: odmik od ponavljajočega množenja kot načina za pridobitev rezultata, uporaba ugnezdene strukture.
- Uporaba kategorizacije tudi za druge matematične pojme.

Sklep

- Spoznanja o uporabi vizualnih reprezentacij v zgodnjem matematičnem izobraževanju.
- Povezava vizualnih reprezentacij s tipi matematičnega znanja, ki jih je mogoče razbrati iz njih.
- Pomembnost učiteljevega odzivanja skladno z zaznanimi vidiki, vidnimi v vizualnih reprezentacijah matematičnih pojmov.
- Vpogled v uporabo risb kot novega raziskovalnega in diagnostičnega orodja.

- Collie, R. J. in Martin, A. J. (2017). Students' adaptability in mathematics: Examining self-reports and teachers' reports and links with engagement and achievement outcomes. *Contemporary Educational Psychology*, 49, 355–366.
- Confrey, J. in Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(1), 66–86.
- Copur-Gencturk, Y. in Doleck, T. (2021). Strategic competence for multistep fraction word problems: an overlooked aspect of mathematical knowledge for teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 107(1), 49–70.
- Davis, J. (2009). Understanding the influence of two mathematics textbooks on prospective secondary teachers' knowledge. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12, 365–389. doi:10.1007/s10857-009-9115-2
- Hegarty, M. in Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual–spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of educational psychology*, 91(4), 684–689.
- Hurrell, D. (2021). Conceptual knowledge or procedural knowledge or conceptual knowledge and procedural knowledge: Why the conjunction is important to teachers. *Australian Journal of Teacher Education (Online)*, 46(2), 57–71.
- Hussein, Y. F. in Csikos, C. (2023). The effect of teaching conceptual knowledge on students' achievement, anxiety about, and attitude toward mathematics. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 19(2), em2226. doi:10.29333/ejmste/12938
- Isik, C. in Kar, T. (2012). An Error Analysis in Division Problems in Fractions Posed by Pre-Service Elementary Mathematics Teachers. *Educational Sciences: Theory and Practice*, 12 (3), 2303–2309.
- Kavkler, M. (2011). Učenci z učnimi težavami pri matematiki – učinkovitejše odkrivanje in diagnostično ocenjevanje. V L. Magajna in M. Velikonja. (Ur.), *Učenci z učnimi težavami. Prepoznavanje in diagnostično ocenjevanje* (str. 130–146). Ljubljana: Pedagoška fakulteta.
- Lipovec, A. in Podgoršek Mesarec, M. (2021). Prospective primary teachers' shift in locus of control and pedagogy focus. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 24(4), 361–373.
- Mitchelmore, M. in White, P. (2004). Abstraction in mathematics and mathematics learning. V M. J. Hoines in A. B. Fuglestad (ur.), *Proceedings of the 28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Vol. 3* (str. 329–336). Bergen, Norway: PME.
- Ombay, S. O. in Roble, D. B. (2020). Mathematical Commognition: An Investigation Using Repetition with Complex Variations. *American Journal of Educational Research*, 8(5), 267–271.
- Özpınar, İ. in Arslan, S. (2022). Investigation of basic mathematical knowledge of preservice maths teachers: procedural or conceptual?. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(8), 2115–2132.
- Siegler, R. S. in Lortie-Forgues, H. (2015). Conceptual knowledge of fraction arithmetic. *Journal of Educational Psychology*, 107(3), 909–918. doi: <http://dx.doi.org/10.1037/edu000002>
- Yilmaz, R. in Argun, Z. (2018). Role of visualization in mathematical abstraction: The case of congruence concept. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, 6(1), 41–57.
- Žakelj, A., Prinčič, A., Perat, Z., Lipovec, A., Vršič, V., Repovž, B., Senekovič, J., Bregar Umek, Z. (2011). *Program osnovna šola: Matematika. Učni načrt*. Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport.