

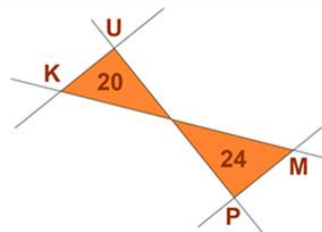
Razvoj prostorskih predstav skozi vizualizacijo pri pouku matematike: teoretična izhodišča

dr. Sanela Hudovernik
UP Pedagoška fakulteta

mag. Katarina Dolgan
Zavod RS za šolstvo

Laško, 11. in 12. november 2024

6. konferenca o učenju
in poučevanju matematike
KUPM 2024



ZRSŠ
ZAVOD
REPUBLIKE SLOVENIJE
ZA ŠOLSTVO



REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA VZGOJO IN IZOBRAŽEVANJE

I FEEL
SLOVENIA



Sofinancira
Evropska unija

Pomembnost prostorskega mišljenja

- Zaradi vedno večjih potreb po družbi, ki ima razvite prostorske predstave, se ta večšina vse bolj prepoznava kot bistvena v vzgoji in izobraževanju (Metoyer idr., 2015; Bednarz in Bednarz, 2008).
- Zmožnost prostorskih predstav je izredno uporabna v številnih vidikih vsakdanjega življenja, akademskih disciplinah in poklicnih področjih (Hawes idr., 2015; Nielsen idr., 2011).
 - Vsakdanje življenje: Navigacija in orientacija v prostoru, organizacija predmetov v domu ter športne aktivnosti.
 - Akademsko področja: Ključnega pomena za matematiko, fiziko, kemijo in geografijo, kjer prostorsko razumevanje omogoča učinkovito vizualizacijo konceptov.
 - Poklicna področja: Arhitektura, gradbeništvo, inženirstvo, medicina, računalniška grafika in letalstvo zahtevajo napredno prostorsko orientacijo in vizualizacijo za uspešno delovanje v 3D okoljih.

Zakaj je prostorsko mišljenje pomembno?

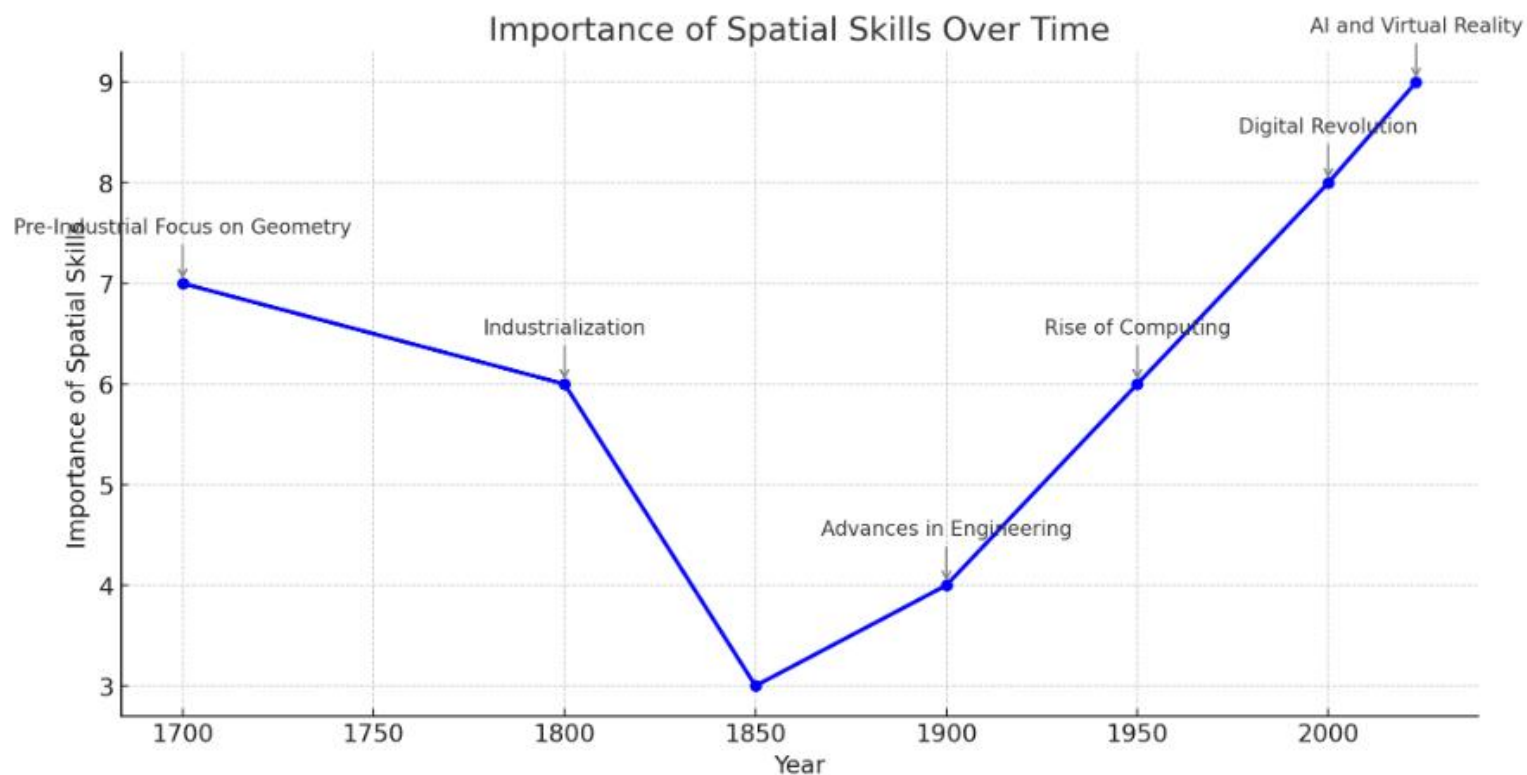
- Prostorske predstave so ključne za učenje matematike
 - Močna povezanost med prostorskimi spretnostmi in matematično uspešnostjo (Gilligan, 2020)
 - Prostorske predstave se povezujejo s sposobnostjo reševanja kompleksnih matematičnih problemov (Gilligan idr., 2017; Manginas idr., 2017; Mix idr., 2016; Verdine idr., 2017)
 - Prostorske spretnosti v zgodnjem otroštvu pomembno napovedujejo poznejše matematične dosežke (Gilligan idr., 2017; Gilligan idr., 2018; Casey idr., 2017; Rittle-Johnson idr., 2018)
- Zmožnost prostorskih predstav omogoča uspešno učenje STEM področij (Hawes idr., 2015; McGarvey idr. 2018; Rich in Brendefur, 2018; Gilligan, 2020; Simmons idr. 2012; Whiteley idr., 2015; Verdine idr. 2017).
 - Prostorske zmožnosti so bistvene ne le za matematiko, ampak tudi za druge znanstvene in tehnične discipline

Zakaj je prostorsko mišljenje pomembno?

- Razvijanje prostorskih spretnosti izboljša bralno uspešnost, zlasti pri mladostnikih z nizkim socialnim statusom (Crano in Johnson, 1991; Johnson in Crano, 1978)
- Močna pozitivna povezanost med prostorskimi spretnostmi in inženirskimi sposobnostmi reševanja problemov (Sorby idr., 2020)
- Razvijanje prostorskih sposobnosti krepi splošno ustvarjalno razmišljanje (Cerrato idr., 2019)

Zgodovinski pregled učenja in poučevanja prostorskega mišljenja

- Pred-industrijsko obdobje – geometrija kot temeljno znanje
- Industrializacija – padec pomena zaradi osredotočenosti na praktične industrijske veščine
- 20. stoletje – ponovni vzpon z napredkom v računalništvu in digitalizaciji



Prostorske zmožnosti: genetika ali vpliv okolja

- Prve študije so nakazovale močno genetsko komponento (Bock in Kolakowski, 1973; Hartlage, 1970)
- Sodobne raziskave potrjujejo, da prostorskega mišljenja ne moremo pripisati zgolj genetiki, ampak ga je mogoče razvijati in izboljševati skozi izkušnje in prakso (Gittler in Vitouch, 1994; Haun idr., 2006)
- **Prostorske spretnosti je mogoče izboljšati z usposabljanjem in vadbo (Gilligan, 2020; Lowrie idr., 2019; Nite idr., 2023)**
 - Nujno je te vsebine namensko vključevati v učni načrt in razviti učinkovite učne metode, ki bodo pomagale učencem sistematično in ciljno izboljšati prostorske spretnosti (Nielsen idr., 2011; Metoyer idr., 2015)

Vključevanje razvijanja prostorskih predstav v učne načrte

- S prepoznavanjem njegove pomembnosti se prostorsko mišljenje vse bolj vključuje v kurikule in učne načrte po svetu (Whiteley idr., 2015).
- Ta pristop lahko zagotovi, da se prostorske veščine razvijajo že od zgodnjega izobraževanja, kar povečuje možnosti za uspeh učencev na vseh ravneh (Verdine idr., 2017).
- V mnogih državah so pobude, ki v učne programe vključujejo veščine prostorskega mišljenja, saj tako učenci pridobijo znanja, pomembna za uspeh v 21. stoletju (Whiteley idr., 2015)

Kako bi z eno besedo opisali prostorsko mišljenje?



A word cloud of Slovenian terms related to cognitive processes. The most prominent words are 'Vizualizacija' (Visualization) in large blue font and 'Sestavljanje' (Assembly) in large green font. Other significant words include 'Orientacija' (Orientation) in green, 'Razstavljanje' (Disassembly) in green, 'Navigacija' (Navigation) in green, 'Prepoznavanje' (Recognition) in green, 'Usklajevanje' (Coordination) in green, 'Komparacija' (Comparison) in green, 'Shematizacija' (Schematization) in green, 'Simetrija' (Symmetry) in green, 'Lokacija' (Location) in green, 'Ocenjevanje' (Evaluation) in green, 'Transformacija' (Transformation) in green, 'Sestavljanje' (Assembly) in blue, 'Razstavljanje' (Disassembly) in green, 'Prepoznavanje' (Recognition) in green, 'Usklajevanje' (Coordination) in green, 'Komparacija' (Comparison) in green, 'Shematizacija' (Schematization) in green, 'Simetrija' (Symmetry) in green, 'Lokacija' (Location) in green, 'Ocenjevanje' (Evaluation) in green, 'Transformacija' (Transformation) in green, 'Sestavljanje' (Assembly) in blue, 'Razstavljanje' (Disassembly) in green, 'Prepoznavanje' (Recognition) in green, 'Usklajevanje' (Coordination) in green, 'Komparacija' (Comparison) in green, 'Shematizacija' (Schematization) in green, 'Simetrija' (Symmetry) in green, 'Lokacija' (Location) in green, 'Ocenjevanje' (Evaluation) in green, 'Transformacija' (Transformation) in green.

Prostorsko mišljenje

- Zmožnost prostorskih predstav oziroma prostorsko mišljenje je kognitivna sposobnost, ki vključuje miselno upodabljanje in transformacijo objektov ter njihovih odnosov v prostoru (Johnson, 2021; Harris, 2023). Zajema različne spretnosti, vključno z določanjem perspektive, miselno rotacijo in prostorsko vizualizacijo, ki so ključne za matematično mišljenje v zgodnjem otroštvu (Pollitt idr., 2017).
- Prostorsko mišljenje je kognitivna sposobnost, ki vključuje razumevanje položaja, razsežnosti in odnosov med predmeti ter miselno vizualizacijo in manipulacijo (Gilligan, 2020).

Prostorsko mišljenje

- Prostorsko mišljenje vključuje dve glavni komponenti (Bishop, 1980; Harris, 1981; McGee, 1979):
 - **prostorsko orientacijo** in
 - **prostorsko vizualizacijo**.
- *Prostorska orientacija* se nanaša na sposobnost prepoznavanja in razumevanja položaja predmetov v prostoru (Young, 2003; MacNeilage idr., 2008), medtem ko *prostorska vizualizacija* vključuje sposobnost ustvarjanja mentalnih podob in manipulacijo s temi podobami (H. Gardner, 2014; Óscar Chávez idr., 2005).

Prostorska vizualizacija in pouk geometrije

- Učencem omogočimo aktivnosti za razvijanje sposobnosti razmišljanja o oblikah ter miselnega manipuliranja, preoblikovanja in premikanja oblik.
- Ključne vsebine za razvoj vizualizacije pri pouku geometrije (Van de Walle idr., 2013):
 - **Spoznavanje lastnosti geometrijskih oblik in odnosov med njimi** ✓
 - Sklop: Liki in telesa
 - **Razumevanje in izvajanje geometrijskih transformacij** ✓
 - Sklop: Transformacije
 - **Določanje in opisovanje položaja predmetov v prostoru in na ravnini** ✓
 - Sklop: Orientacija
 - **Prepoznavanje odnosov med tridimenzionalnimi telesi in njihovimi dvodimenzionalnimi predstavitvami ter opisovanje projekcij predmetov z različnih zornih kotov** ✗
 - Sklop: Vizualizacija
- Primerjava pokritosti vsebin TIMSS in UN kaže, da je bilo le 13 % učencev v Sloveniji obravnavalo cilje vizualizacije (Japelj Pavešić in Svetlik, 2016).

Učenje in poučevanje vizualizacije

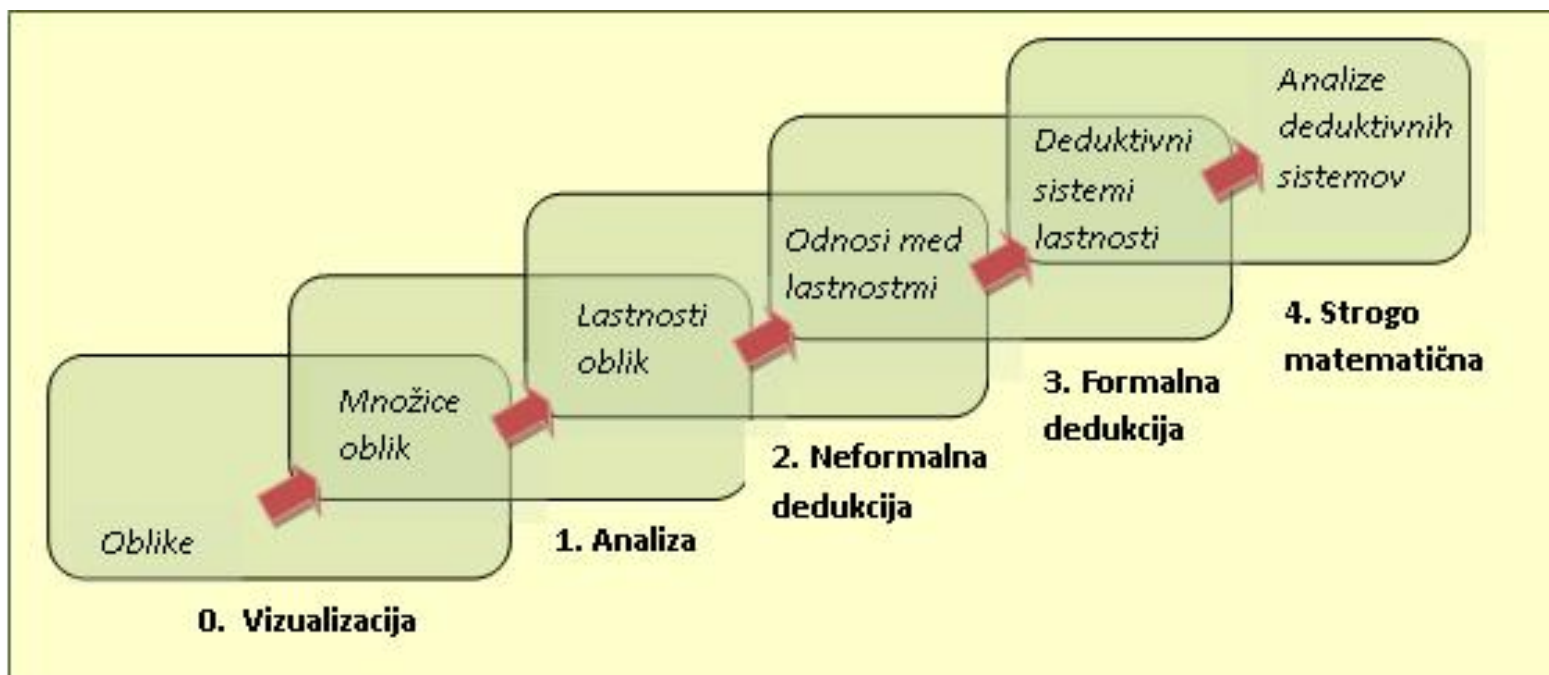
- Urjenje prostorske vizualizacije izboljša prostorsko mišljenje in matematično uspešnost, predvsem pri geometriji in besedilnih nalogah (Lowrie idr., 2019)
- Prostorsko vizualizacijo je mogoče izboljšati z načrtnimi dejavnostmi in programi usposabljanja (Gilligan, 2020; Lowrie idr., 2019)
- Prostorsko vizualizacijo lahko razvijamo pri učencih vseh starosti, koristi pa tako dečkom kot deklicam (Ben-Chaim idr., 1988)

Učenje in poučevanje geometrije

- Metode za razvijanje prostorske vizualizacije:
 - Skiciranje, risanje, igranje iger in videoiger, origami, tangrami
 - Raba konkretnih modelov, skic, specializiranih učnih modeli (Sorby, 1999; Pujawan idr., 2020)
 - Raba računalniške programske opreme za modeliranje, multimedijška orodja, virtualna okolja, 3D-tiskalnik (Ardebili, 2006; Medina Herrera idr., 2024)
- **Metoda učenja in poučevanja, posebej zasnovana za pouk geometrije – van Hiele:**
 - Pouk geometrije, ki temelji na teoriji van Hiele, bistveno izboljša prostorske sposobnosti učencev v primerjavi z običajnimi metodami poučevanja (Pujawan et al., 2020; Alex & Mammen, 2016)
 - Učinkovitost pripisujejo njeni zmožnosti, da dvigne raven geometrijskega mišljenja učencev in eksplicitno uči prostorske spretnosti v specifičnih kontekstih (Alex in Mammen, 2016; Sharp in Zachary, 2004).

Učenje in poučevanje vizualizacije po metodi van Hiele

- Teorija pojasnjuje napredek učencev skozi različne ravni razumevanja geometrijskih in prostorskih konceptov.
- Poučevanje temelji na tem, da učitelj prilagodi učne metode trenutni stopnji kognitivnega razvoja učencev.



Slika: Van Hielova teorija razvoja geometrijskih predstav (Vir: Van de Walle idr., 2013, str. 404)

Raven 0

Na tej ravni učenci **prepoznajo oblike na podlagi njihovega videza**, vendar ne razumejo lastnosti teh oblik. Aktivnosti naj se osredotočijo **na prepoznavanje, identifikacijo in primerjavo oblik**, ne da bi od učencev zahtevali, da opisujejo lastnosti.



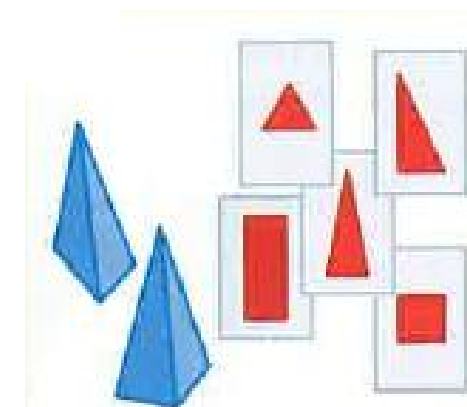
VIDEZ OBLIK

Raven 0

- Aktivnosti:
 - **Ujemanje ploskev teles:** Učenci naj odtiskujejo ploskve geometrijskih teles ter ploskve povezujejo z ustreznimi geometrijskimi telesi, kar jim pomaga vizualizirati, kako se različne 2D podobe združijo v celotno telo.
 - **Sestavljanje in razstavljanje oblik (npr. Pentomino, tangram):** Spodbudite učence, da sestavljajo različne oblike. Ta naloga jim pomaga prepoznati in vizualizirati oblike kot edinstvene entitete, kar podpira njihovo razumevanje oblik skozi praktično manipulacijo.



Find a shape with these faces.



Which cards do you need for each shape?
How many?

Raven 1

Na tej ravni učenci začnejo **prepoznavati lastnosti in značilnosti oblik**, kot so **dolžine stranic in koti**, in ne le celotne oblike. Oblike začnejo opisovati **na podlagi lastnosti** in ne le na podlagi videza.



**LASTNOSTI IN
ZNAČILNOSTI
OBLIK**

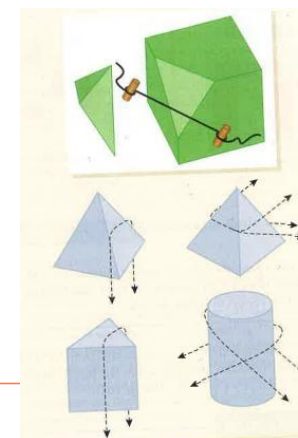
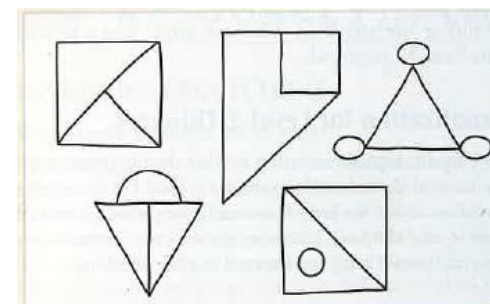
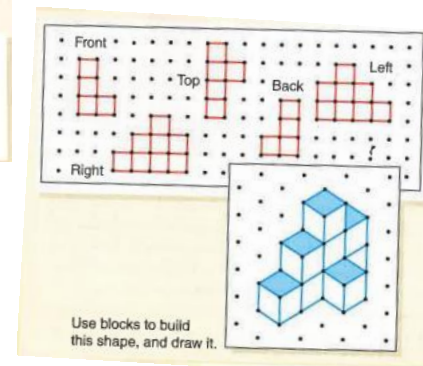
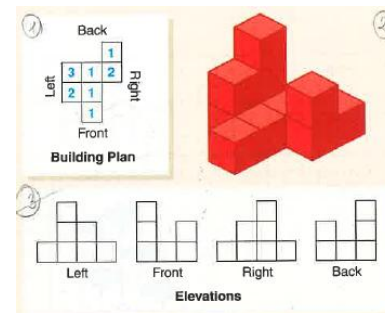
Raven 1

Aktivnosti:

Projekcija konstrukcije: Učenci oblikujejo projekcije konstrukcij iz različnih zornih kotov, pri čemer se naučijo povezati sprednji, stranski in zgornji pogled s 3D obliko. To podpira njihovo razumevanje lastnosti in različnih perspektiv oblik.

Hitre slike: Učencem na kratko pokažemo obliko in jih nato prosimo, da jo ponovijo. Ta aktivnost učence spodbuja, da se osredotočijo na lastnosti oblike ter jo prikličejo iz spomina in natančno reproducirajo.

Prerez teles: Učenci s pomočjo modelov prikažejo (kasneje tudi si predstavljajo) prerez teles in raziskujejo ploskev prereza, ki je pri tem nastala. Prerez teles omogoča učencem razviti sposobnost vizualizacije notranjosti telesa. Ko si poskušajo predstavljati, kako izgleda telo po prerezu, se učijo mentalne rotacije in manipulacije objektov v mislih.



Raven 2

Učenci na tej ravni lahko razumejo odnose med lastnostmi in začnejo neformalno utemeljevati geometrijske pojme. Spoznajo lahko, kako sprememba ene lastnosti vpliva na celotno obliko.



**ODNOSI MED
LASTNOSTMI
OBLIK**

Raven 2

Aktivnosti:

- **Sestavljene oblike:** Aktivnosti, ki omogočajo raziskovanje sestavljenih oblik, kot so šestkotniki, učencem predstavijo bolj kompleksne konfiguracije. Z raziskovanjem, kako se oblike med seboj prilegajo in si delijo lastnosti, lahko gradijo logične povezave med različnimi oblikami.
- **Platonova telesa:** Učenci iščejo, opisujejo in raziskujejo Platonova telesa. S tem, ko si poskušajo predstavljati, kako so ploskve, robovi in oglišča povezani, izboljšujejo svoje razumevanje prostorskih odnosov, razvijajo analitično mišljenje in sposobnost logičnega sklepanja.

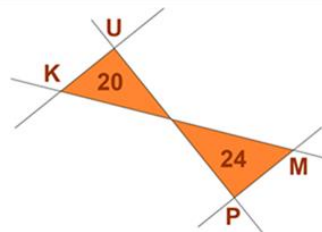
Raven 3 in 4

Na teh naprednih ravneh učenci razumejo formalne dokaze in definicije, obvladajo lastnosti ter deduktivno razmišljajo. Poučevanje na teh ravneh bi običajno vključevalo dokaze in rigorozno raziskovanje geometrijskih konceptov.

**RAZUMEVANJE
FORMALNIH
DOKAZOV IN
DEFINICIJ**

Hvala za vašo pozornost!

6. konferenca o učenju
in poučevanju matematike
KUPM 2024



ZRSŠ
ZAVOD
REPUBLIKE SLOVENIJE
ZA ŠOLSTVO



REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA VZGOJO IN IZOBRAŽEVANJE

I FEEL
SLOVENIA



Sofinancira
Evropska unija