Rad bi sodeloval pri raziskovalni nalogi

Mag. Alojz Grahor

Škofijska gimnazija Vipava (upokojenec)

Laško, 11. in 12. november 2024

6. konferenca o učenju in poučevanju matematike KUPM 2024

Vsebina

- Odkrivanje nadarjenih
- Delo z nadarjenimi
- Motivacija
- Ideje za raziskovalne naloge

Odkrivanje nadarjenih

Za samo odkrivanje nadarjenih dijakov nisem imel posebnih metod:
ocene,
kako so reševali pisne naloge,
opazovanje,
kako so zastavljali vprašanja,
pogovore ob koncu šolskih ur ter
povabila na priprave za tekmovanja.

Delo z nadarjenimi dijaki

Klasičnih krožkov po pouku je bilo malo, večinoma med glavnimi odmori.

Zavedal sem se, da je v vsakem oddelku nekaj mladih, ki jih matematika pritegne.

Delo z nadarjenimi dijaki

Matematični borječ (Gimnazija Vipava)

Predmet | Nastavitve | Sodelujoči | Ocene | Poročila | Več

https://skupnost.sio.si/course/view.php?id=835

Delo z nadarjenimi dijaki

Kaj omogoča spletna učilnica?

- lahko sem vključil različno gradivo,
- dijaki so imeli dostop do gradiv kadarkoli in kolikor so želeli
- omogoča neposredno komunikacijo med dijakom in učiteljem, tudi preko foruma
- Vključil sem možnost „Oddaja naloge“, pri težjih nalogah namige
- Dijak se je lahko vključil po svojih zmožnostih in glede na njegovo motivacijo

Učilnica Moodle „Logično – lingvistični borječ“

https://skupnost.sio.si/course/view.php?id=9037

Motivacija pri pouku

Način pouka:

- Pri razlagi nisem nikoli uporabljal prosojnic,
- matematika je nastajala na tabli po metodi KTG.
- vključeval sem preiskovalni pristop, ki pri dijakih krepi radovednost.
- vključeval sem grafične programe (RiŠ, Geogebra), pa tudi CAS (Derive)
- v zadnjih letih tudi svetovni splet (na primer pri praštevilih)

- Pri pisnih nalogah: naloge tipa Č

Motivacija pri pouku

- Vedno sem se zavedal, da so v oddelku tudi dijaki, ki so matematično nadarjeni. Zato sem zelo pogosto snov nekoliko razširil – povedal kakšen namig iz višje matematike in pustil okence odprto za razmišljanje. Mogoče je to celo najpomembnejši trenutek, ko lahko učitelj pri nadarjenih dijakih vzbudi zanimanje za tisto nekaj več.
- Pri kompleksnih števili … quaternioni
- Pri trirazsežnem prostoru še štirirazsežnega …
- Pri elipsi še elipsoid
- Pri krožnici še krožnico na premici

Raziskovalne naloge

- Najbolj izrazito se je delo z nadarjenimi matematiki izkazalo pri izdelavi raziskovalnih nalog. V zadnjih 17 letih je 31 dijakov in dijakinj izdelalo 14 raziskovalnih nalog iz matematike. Vse so bile uvrščene na zaključno državno srečanje v okviru gibanja ZOTKS. Trinajst nalog je doseglo zlato priznanje, ena pa srebrno. Dve izmed njih sta bili uvrščeni na evropsko srečanje EUCYS.

- Nekatere dijake in dijakinje smo povabili k sodelovanju, velikokrat so pa sami izrazili prošnjo, da bi radi sodelovali pri izdelavi naloge.

- Pomembno je učiteljevo znanje (raziskovanje) matematike

Raziskovalne naloge

Kriteriji za izbiro teme

- Zajema znanje, ki ga dijaki že obvladajo in malo več;
- Mora se razlikovati od seminarske naloge;
- Tema zanimiva
- Ocena, da bodo dijaki zmogli razumeti

Raziskovalne naloge

Vloga mentorja:

Zelo pomaga pri izboru teme

Ima „približen cilj“, do katergae vodi dijake;

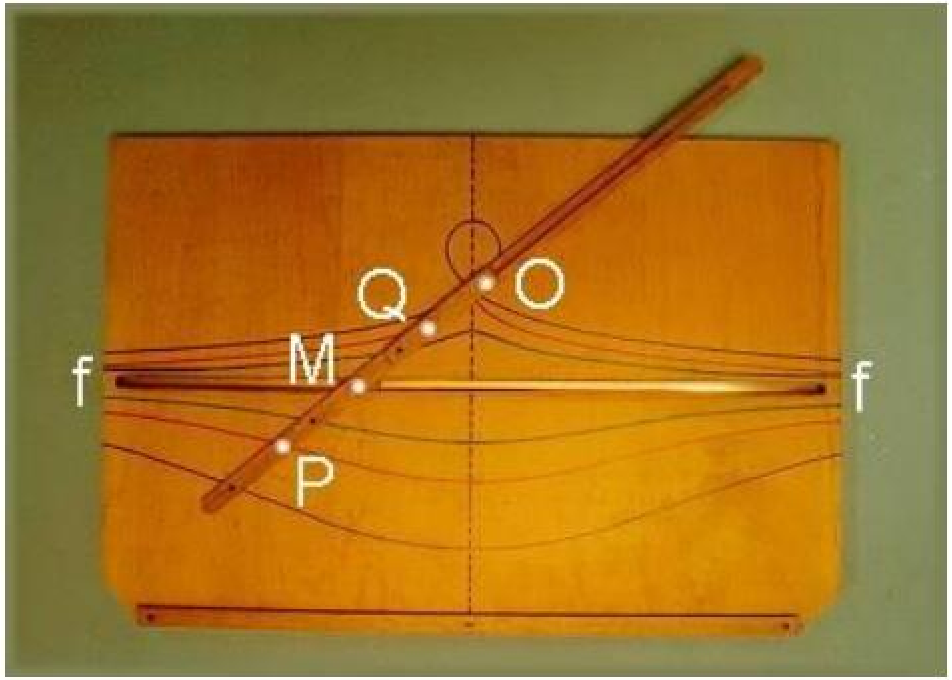
Pomaga pri zapisu naloge

Vmes pa vodenje, stalna tedenska srečanja, komunikacija preko spletna učilnice

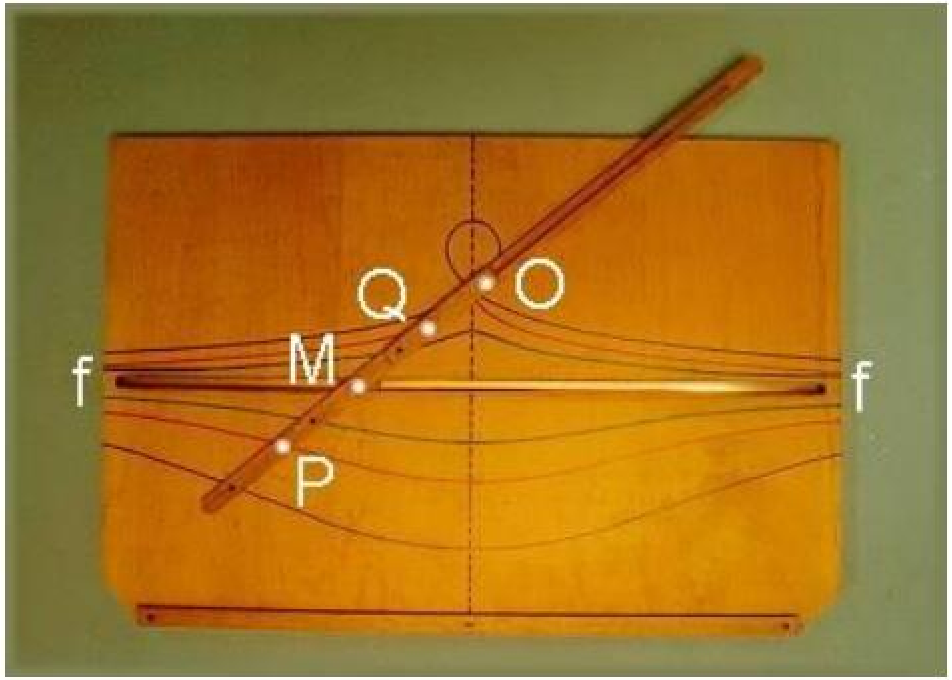
KO BI STARI GRKI POZNALI DINAMIČNO GEOMETRIJO ...

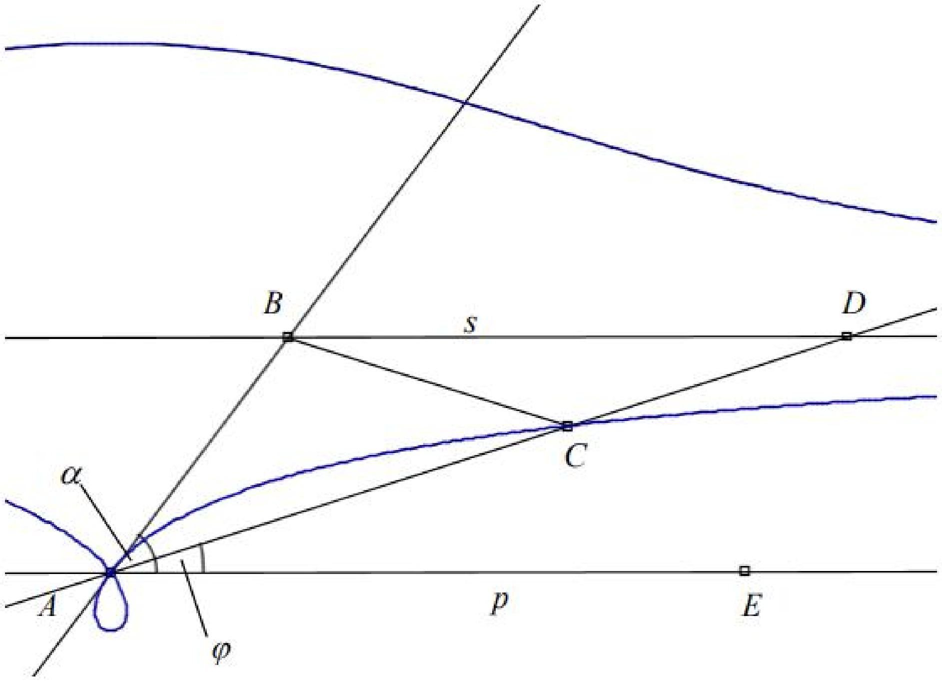
Eἰ τὴν δυναμικ … ον ...

Hipoteza: S pomo … trijo lahko rešimo tri starogršk … kvadraturo kroga.



https://sgv.si/wp-content/uploads/legacy/2018/06/KoBiStariGrkiPoznaliDGS.pdf

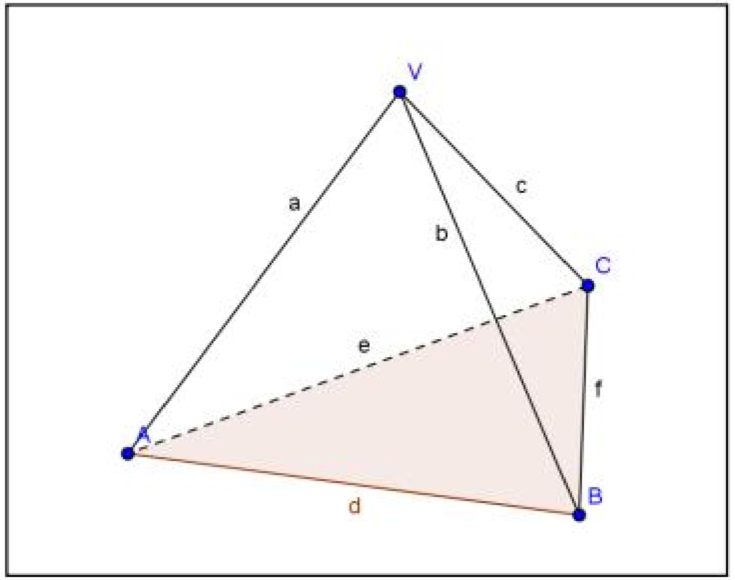




Slika 5: Tretjinjenje s pomočjo Nikomedove konhoide

POSPLOŠITEV PITAGOROVEGA IZREKA

V TRIRAZSEŽNEM IN ŠTIRIRAZSEŽNEM PROSTORU



Ali v trirazsežni pravokotni piramidi veljajo izreki, ki so analogni izrekom v pravokotnem trikotniku:

- Pitagorov izrek,
- višinski izrek,
- Evklidov izrek.

https://sgv.si/wp-content/uploads/legacy/2018/06/Pitagorov-izrek-v-3D-in-4D.pdf

MNOŽENJE IN RAZSTAVLJANJE PITAGOREJSKIH TROJIC

Množica celih pitagorejskih trojic z množenjem $(a,b,c) \circ (p,r,s) = (ap-br, ar+bp, cs)$ ima enake lastnosti kot množica celih števil z običajnim množenjem:

- velja asociativnostni zakon
- velja komutativnostni zakon
- obstaja enota za množenje
- velja izrek o enoličnem razcepu na nerazcepne pitagorejske trojice, se pravi, da lahko vsako pitagorejsko trojico zapišemo na en sam način kot produkt nerazcepnih pitagorejskih trojic.

https://sgv.si/wp-content/uploads/legacy/2018/06/MNO%C5%BDENJE-IN-RAZSTAVLJANJE-PITAGOREJSKIH-TROJIC.pdf

a) Primeri razcepov na dva nerazcepna faktorja

$$(817,744,1105)=(4,3,5)\circ(220,21,221)=(15,8,17)\circ(63,16,65)$$
$$(576,943,1105)=(3,4,5)\circ(220,21,221)=(15,8,17)\circ(56,33,65)$$

b) Primeri razcepov na tri nerazcepne faktorje:

$$(264,1073,1105)=$$
$$(4,3,5)\circ(171,140,221)=(5,12,13)\circ(84,13,85)=(8,15,17)\circ(63,16,65)$$

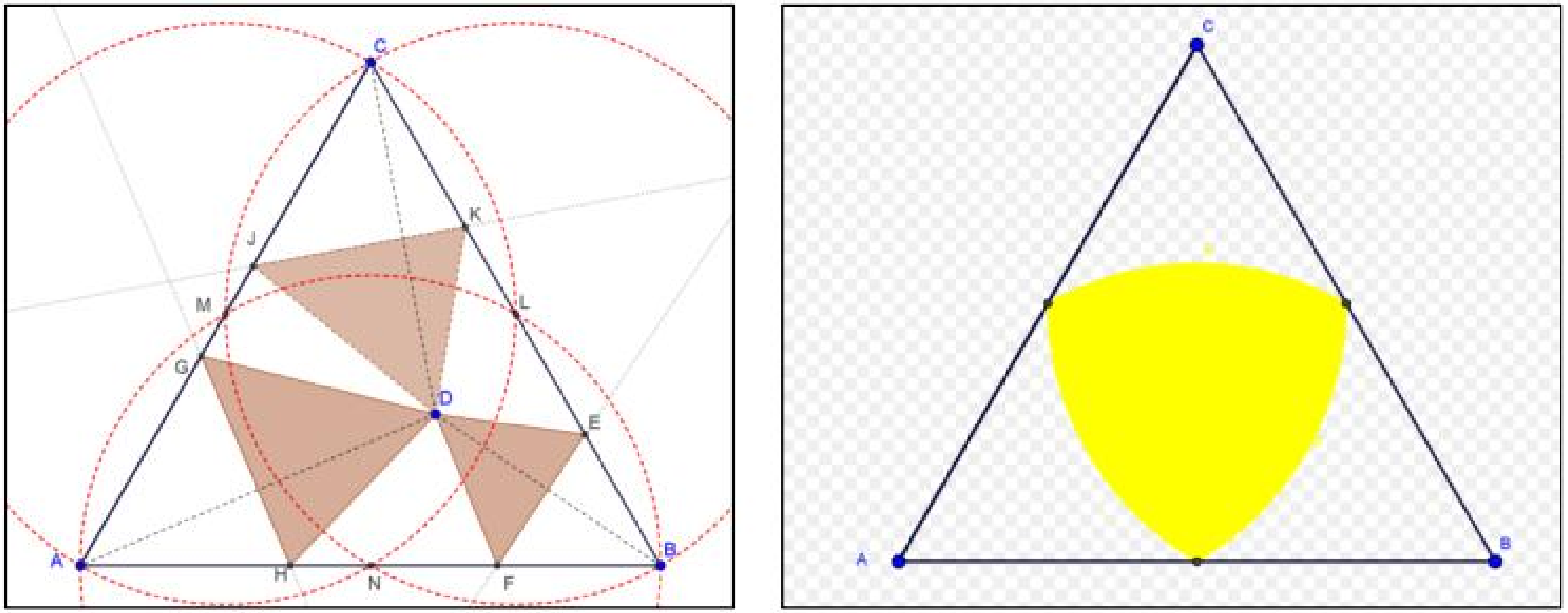
c) Primer razcepa na pet nerazcepnih faktorjev:

$$(33604,69579,77285)=$$
$$=(3,4,5)\circ(15168,2975,15457)$$
$$=(20,21,29)\circ(2537,816,2665)$$
$$=(56,33,65)\circ(989,600,1189)$$
$$=(143,24,145)\circ(308,435,533)$$
$$=(156,133,205)\circ(345,152,377)$$

ORIGAMIKA:
Matematično raziskovanje enakostraničnega trikotnika s prepogibanjem papirja

Cilj naloge je *preiskovati* prepogibanje enakostraničnega trikotnika, *postaviti* čim več matematičnih *hipotez* in jih *dokazati*.

https://sgv.si/wp-content/uploads/legacy/2018/06/ORIGAMIKA-enakostranicnega-trikotnika-1.pdf



Slika 34: Možne lege točke D (skupne točke vseh treh oglišč)

PITAGOREJSKE PETERICE

Cilj naloge je raziskovati pitagorejske peterice in sicer:

- odkriti čim več parametrizacij pitagorejskih peteric,
- odkriti parametrizacijo, ki opiše vse pitagorejske peterice,
- v množici celih pitagorejskih peteric definirati množenje in
- preveriti ter dokazati, ali velja izrek o enoličnem razcepu na nerazcepne pitagorejske peterice.

https://sgv.si/wp-content/uploads/legacy/2018/06/PITAGOREJSKE-PETERICE-1.pdf

$$(a, b, c, d, e) \circ (p, q, r, s, t) = (ap - bq - cr - ds, aq + bp + cs - dr, ar - bs + cp + dq, as + br - cq + dp, et).$$

Izrek 14: V množici naravnih pitagorejskih peteric ne velja izrek o enoličnem razcepu na nerazcepne pitagorejske peterice.

(686, 468, 359, 718, 1155) = (10, 4, 1, 2, 11) ∘ (87, 16, 40, 40, 105)

(686, 468, 359, 718, 1155) = (4, 2, 1, 2, 5) ∘ (219, 20, 50, 50, 231).

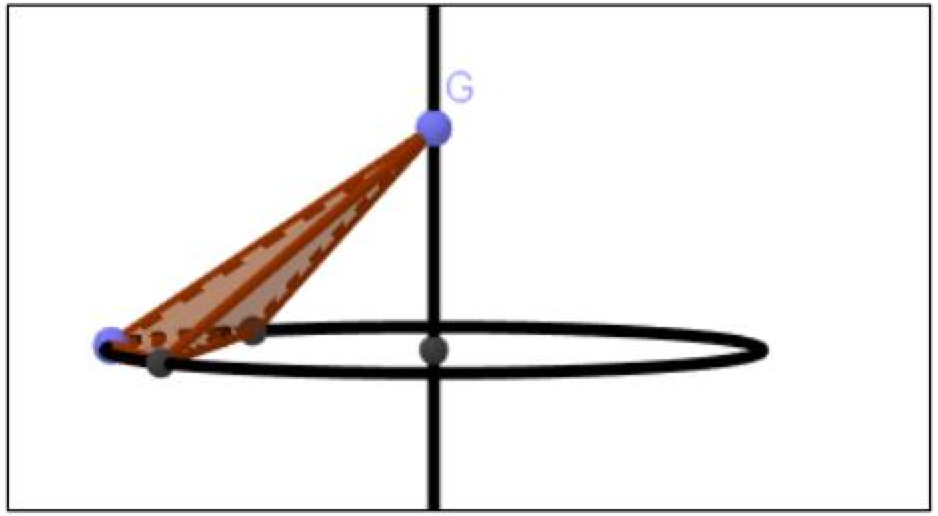
ALI JE POKONČNA PIRAMIDA RES POKONČNA?

Neskladja v gimnazijskih učbenikih za matematiko

https://sgv.si/wp-content/uploads/legacy/2018/06/ALI-JE-POKONCNA-PIRAMIDA-RES-POKONCNA-30-maj-1.pdf

Izziv 1: Izračunaj višino tristrane pokončne piramide $ABCV$, ki ima osnovno ploskev trikotnik ABC s stranicami *a = 13 cm, b = 13 cm, c = 24 cm*, vrh v točki V, dolžina stranskega roba BV pa je *20 cm*. Nariši skico. Izračunaj višino piramide. Koliko je nožišče višine oddaljeno od najdaljše stranice osnovne ploskve?

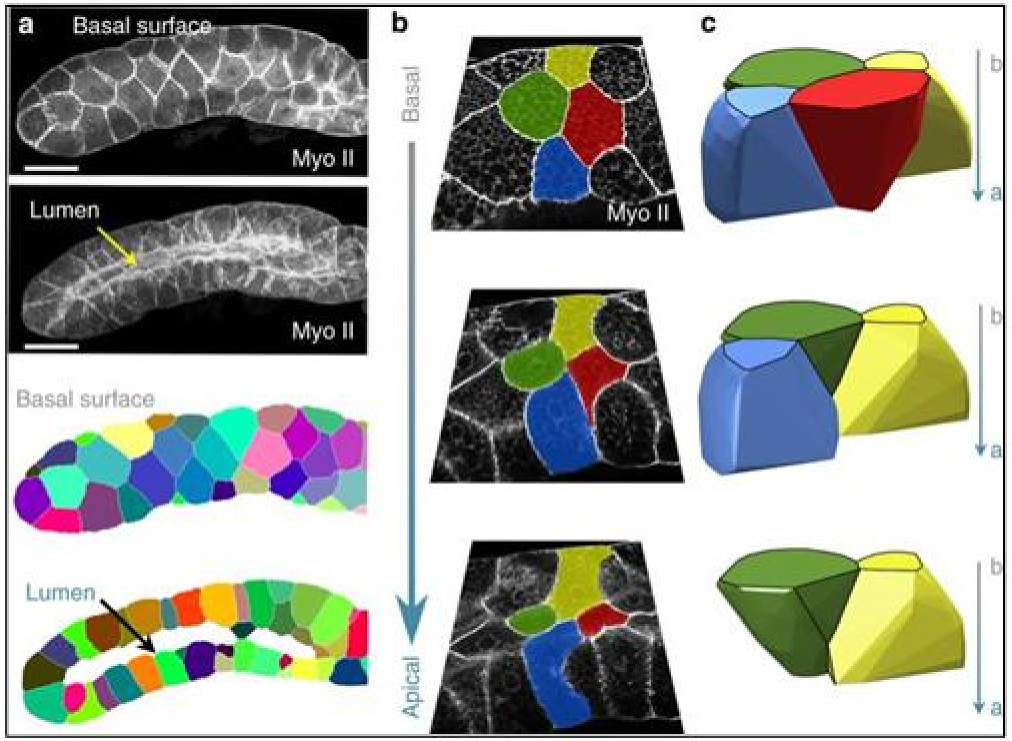
»Piramida je pokončna, če so vsi stranski robovi enako dolgi, sicer je poševna.«



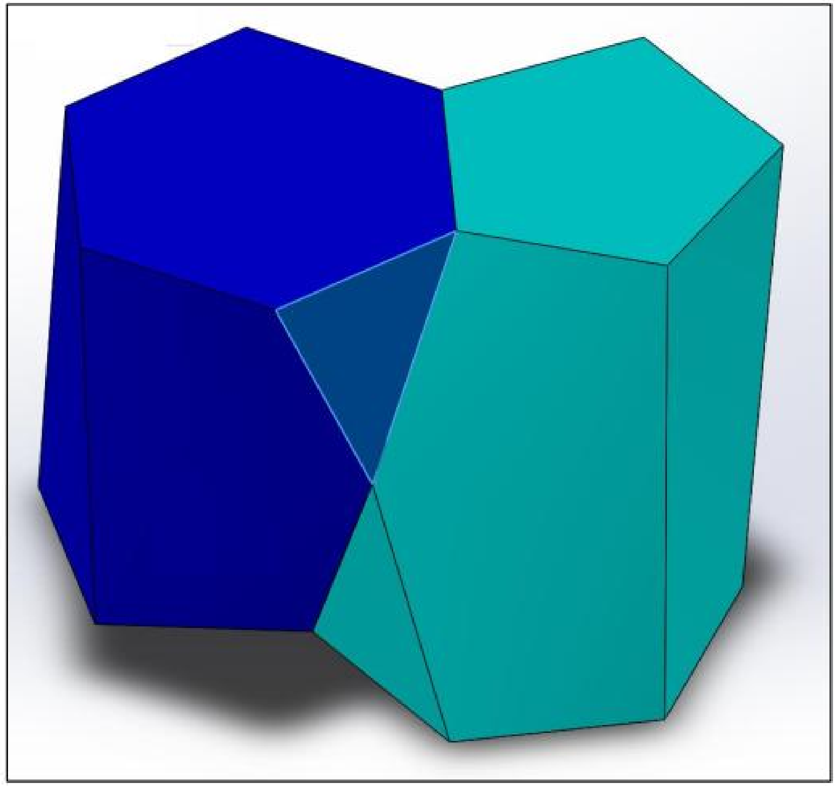
DOPOLNJUJOČI SE SKUTOIDI

Cilj raziskovalne naloge je bil konstruirati dopolnjujoči se skutoid 5-6 in opisati njegove geometrijske lastnosti. Poleg tega je bil cilj konstruirati in opisati lastnosti dopolnjujočih se novih skutoidov 4-5 ter 3-4 in raziskovati, ali in kako se med seboj dopolnjujejo. Privzeli smo tezo, da imajo vsi skutoidi med seboj enako višino in enako dolge stranice osnovnih ploskev.

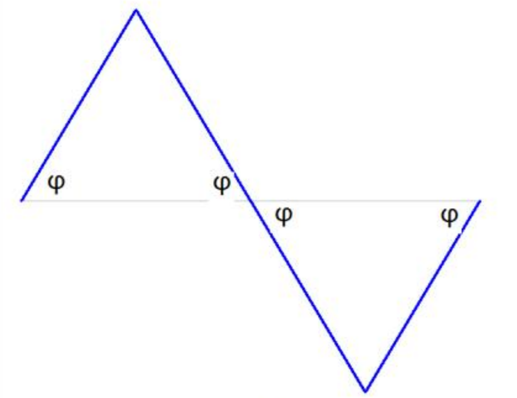
https://sgv.splet.arnes.si/files/2018/06/Dopolnjujo%C4%8Di-se-skutoidi.pdf



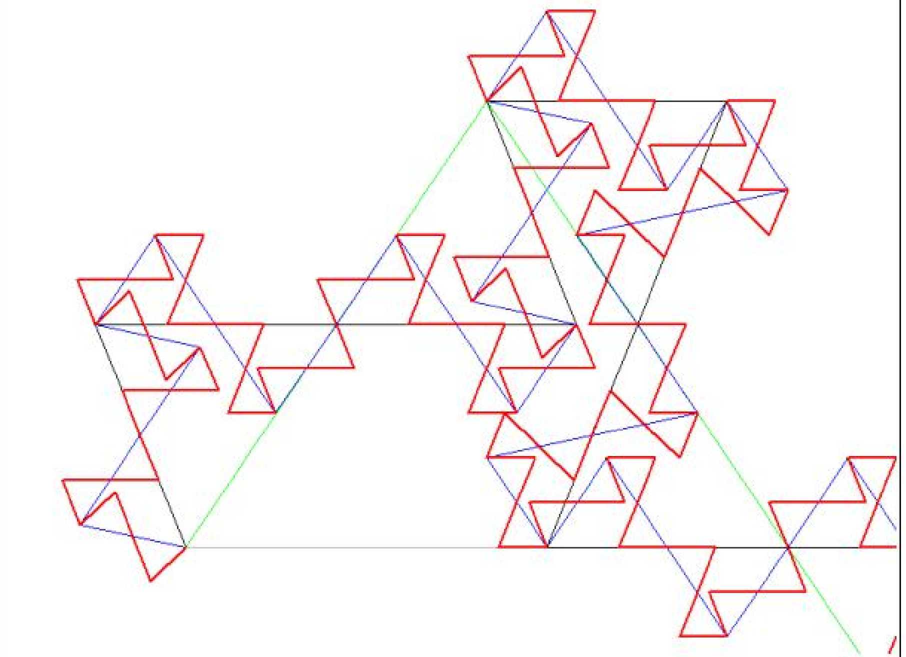
Slika 1: Epitelsko zlaganje celic (Vir: Gomez, 2018)



FRAKTALNA KRIVULJA »CIK-CAK«



Slika 10: Posplošena krivulja "cik-cak".



Slika 11: Prikazani so štirje nivoji drug za drugim.

FRAKTALNA KRIVULJA »CIK-CAK«

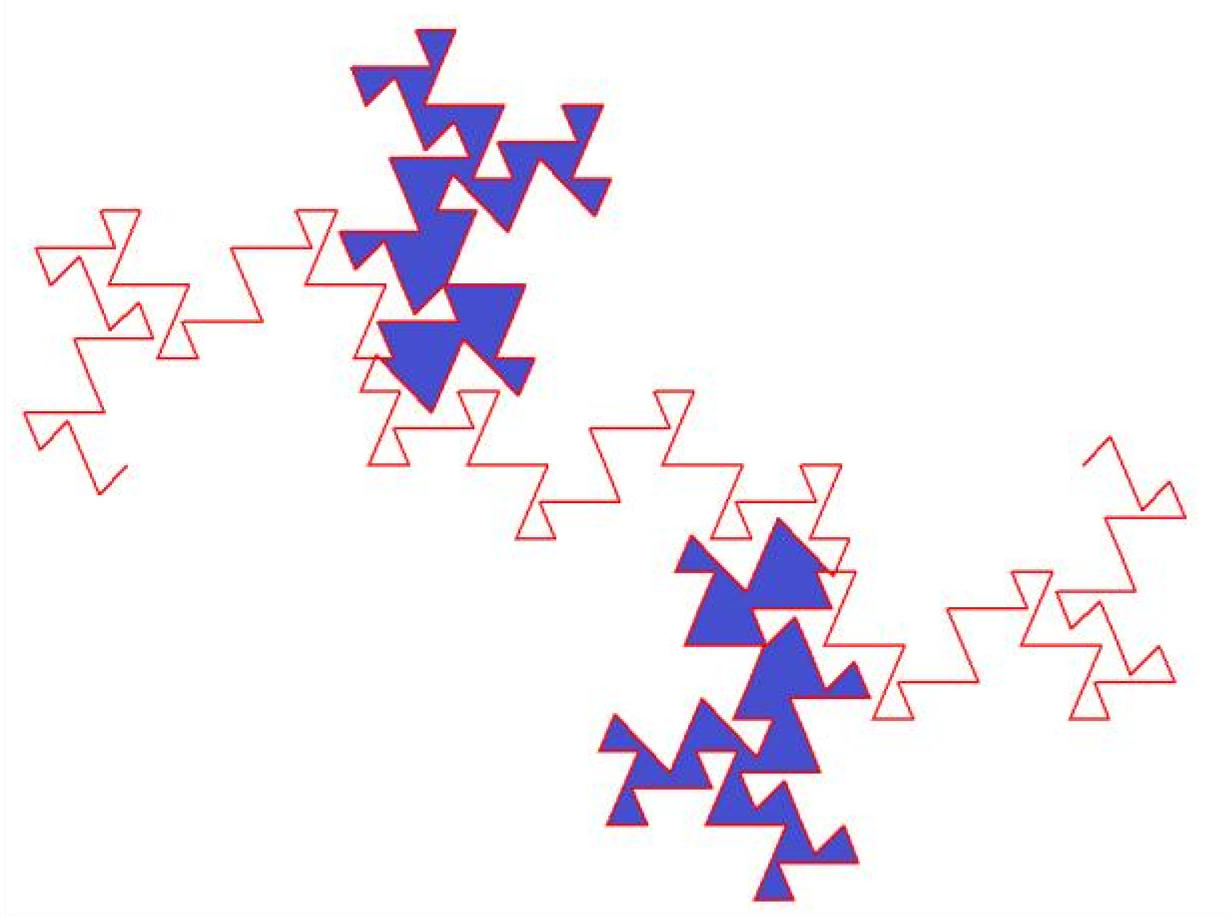
Prvi cilj

V viru [1] je navedeno, da obstajajo le redke krivulje, katerih fraktalna dimenzija je racionalno število. Omenjeni sta dve fraktalni krivulji s to lastnostjo. Njuna generatorja sta na sliki 12. Za cilj sem si zastavil dokazati, da obstaja neskončno fraktalnih krivulj s fraktalno dimenzijo, enako racionalnemu številu.

Drugi cilj

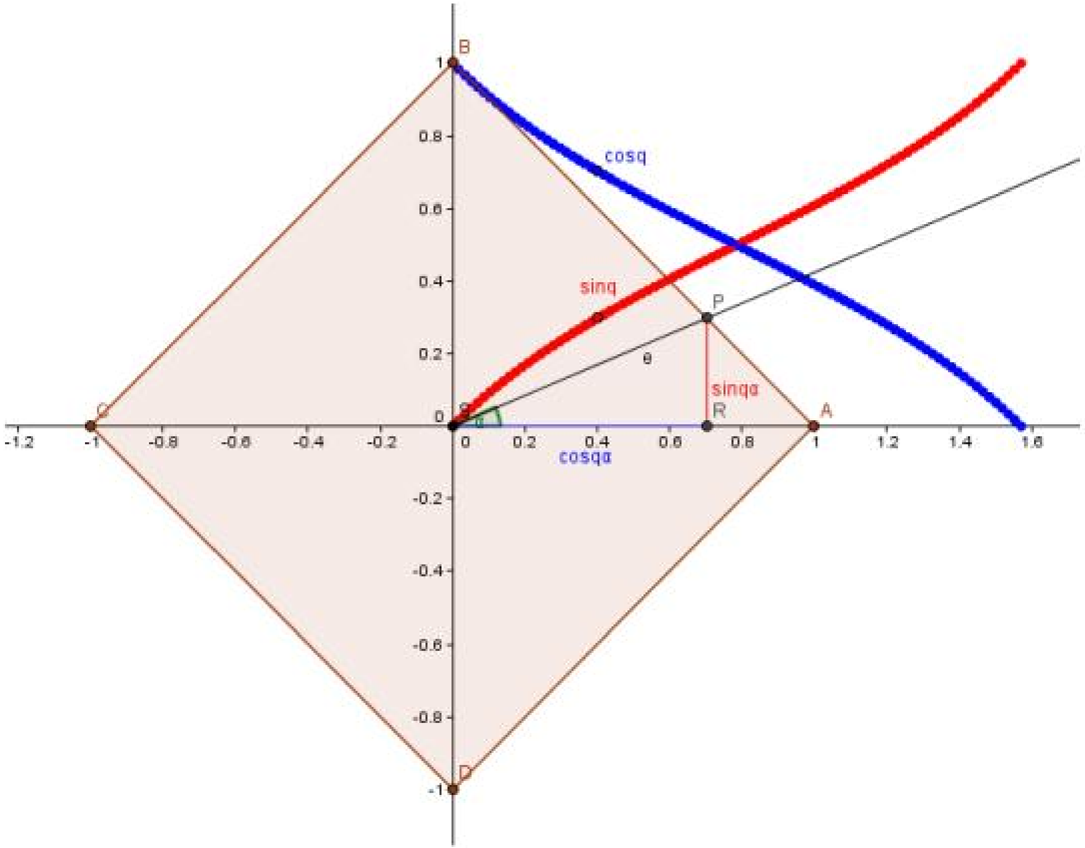
V razdelku 1.6. sem opazil, da pride pri fraktalni krivulji »cik-cak« do prekrivanja krivulje na določenem nivoju, če spreminjamo dani kot zasuka. Za cilj sem si postavil izračunati dotikalni kot za drugi, tretji, četrti, peti, šesti in sedmi nivo in določiti približek dotikalnega kota limitne krivulje »cik-cak«.

https://sgv.si/wp-content/uploads/legacy/2018/06/Fraktalna-krivulja-cikcak_fin.pdf



Slika 29: Fraktalna krivulja "cik-cak" z "jezerci" (pobarvana polja).

Sinus in kosinus quadraticus



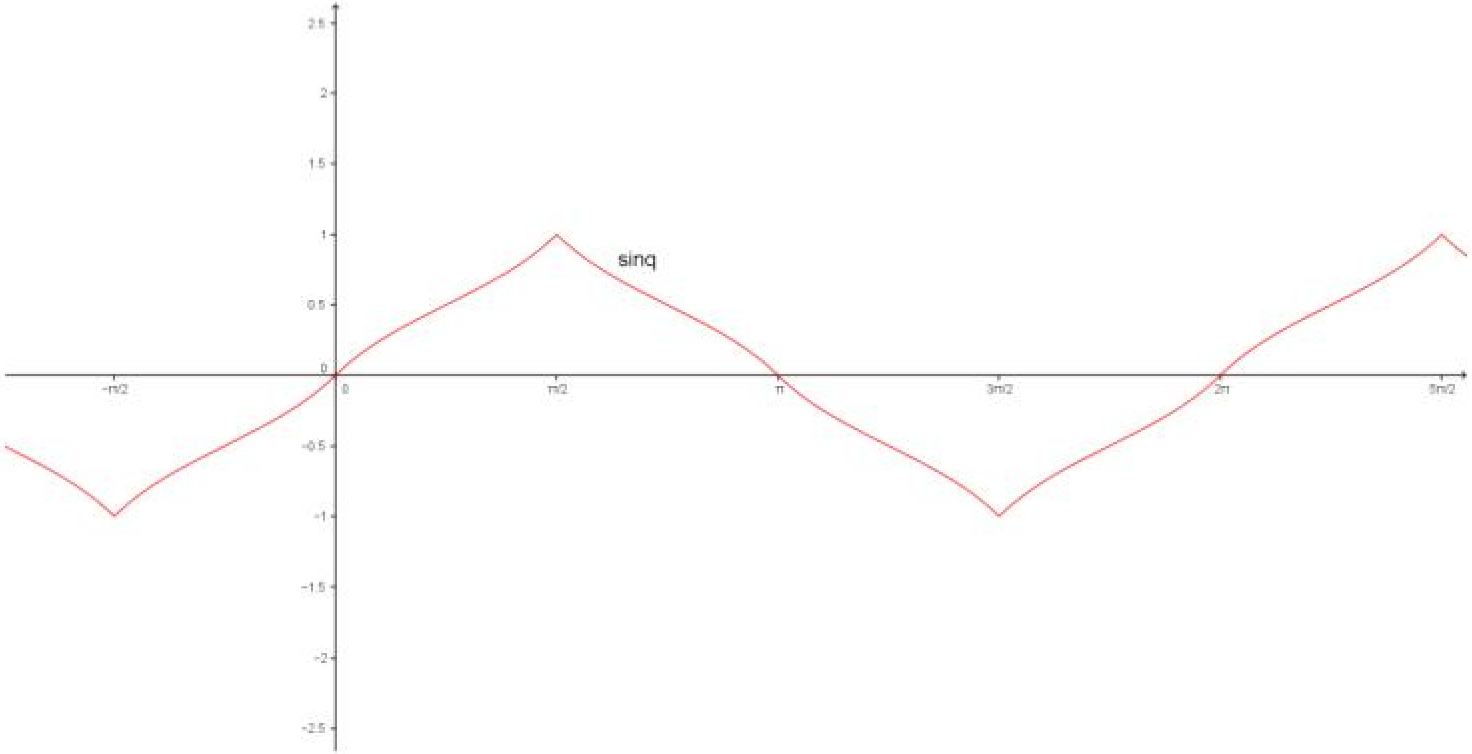
Sinus in kosinus quadraticus

Cilj naloge so:

- definirati kvadratične funkcije (to je funkciji *sinus in kosinus quadraticus*) na enotskem kvadratu $|x| + |y| = 1$ na enak način, kot sta definirani funkciji sinus in kosinus na enotski krožnici,
- opisati lastnosti funkcij *quadraticus*,
- primerjati lastnosti funkcij *quadraticus* s kotnimi funkcijami sinus, kosinus in tangens,
- izpeljati adicijske izreke za funkcije *quadraticus* in
- posplošiti definicijo kotnih funkcij na poljubni enotski krivulji $\mathbf{|x|^n + |y|^n = 1, n \in N.}$

https://sgv.si/wp-content/uploads/legacy/2018/06/Sinus-in-kosinus-quadraticus-Koncna.pdf

Sinus in kosinus quadraticus

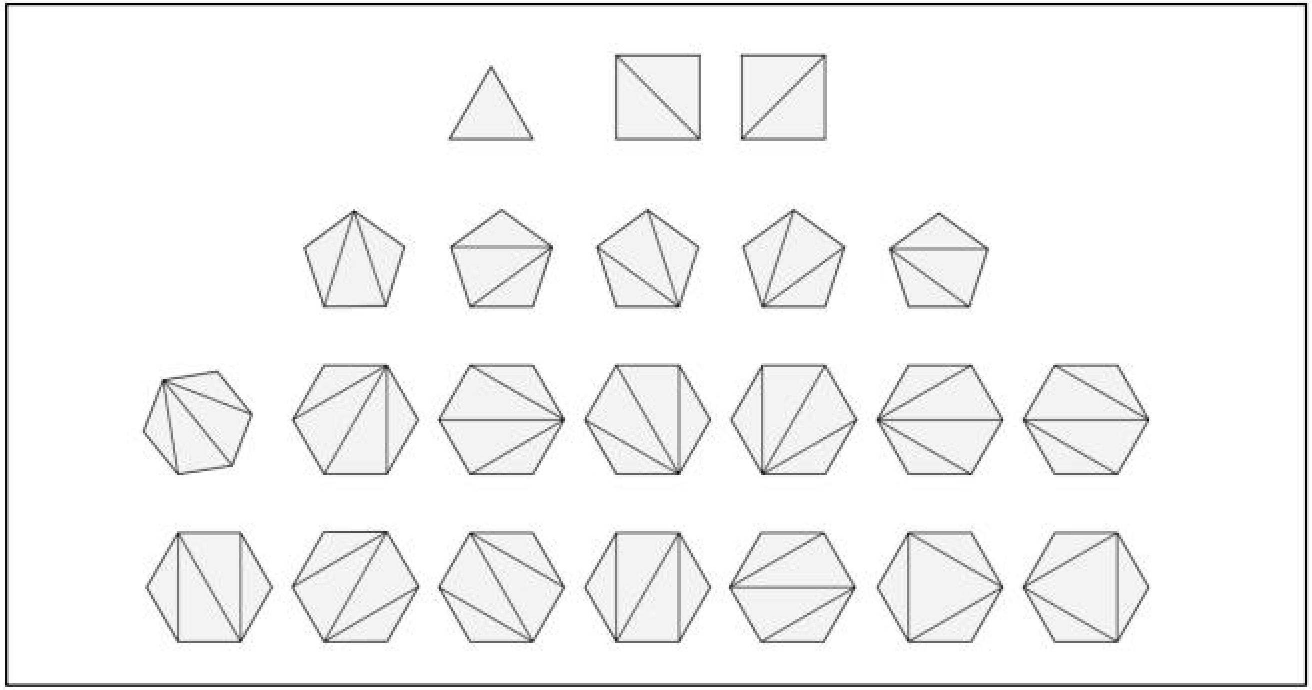


Slika 5: Graf funkcije sinus quadraticus ($f(x) = \mathbf{sinq}(x)$)

$$\operatorname{cosq}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cosq}\alpha \operatorname{cosq}\beta \mp \operatorname{sinq}\alpha \operatorname{sinq}\beta}{\operatorname{cosq}\alpha \operatorname{cosq}\beta \mp \operatorname{sinq}\alpha \operatorname{sinq}\beta + \operatorname{sinq}\alpha \operatorname{cosq}\beta \pm \operatorname{cosq}\alpha \operatorname{sinq}\beta}$$

$$\operatorname{sinq}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{sinq}\alpha \operatorname{cosq}\beta \pm \operatorname{cosq}\alpha \operatorname{sinq}\beta}{\operatorname{cosq}\alpha \operatorname{cosq}\beta \mp \operatorname{sinq}\alpha \operatorname{sinq}\beta + \operatorname{sinq}\alpha \operatorname{cosq}\beta \pm \operatorname{cosq}\alpha \operatorname{sinq}\beta}$$

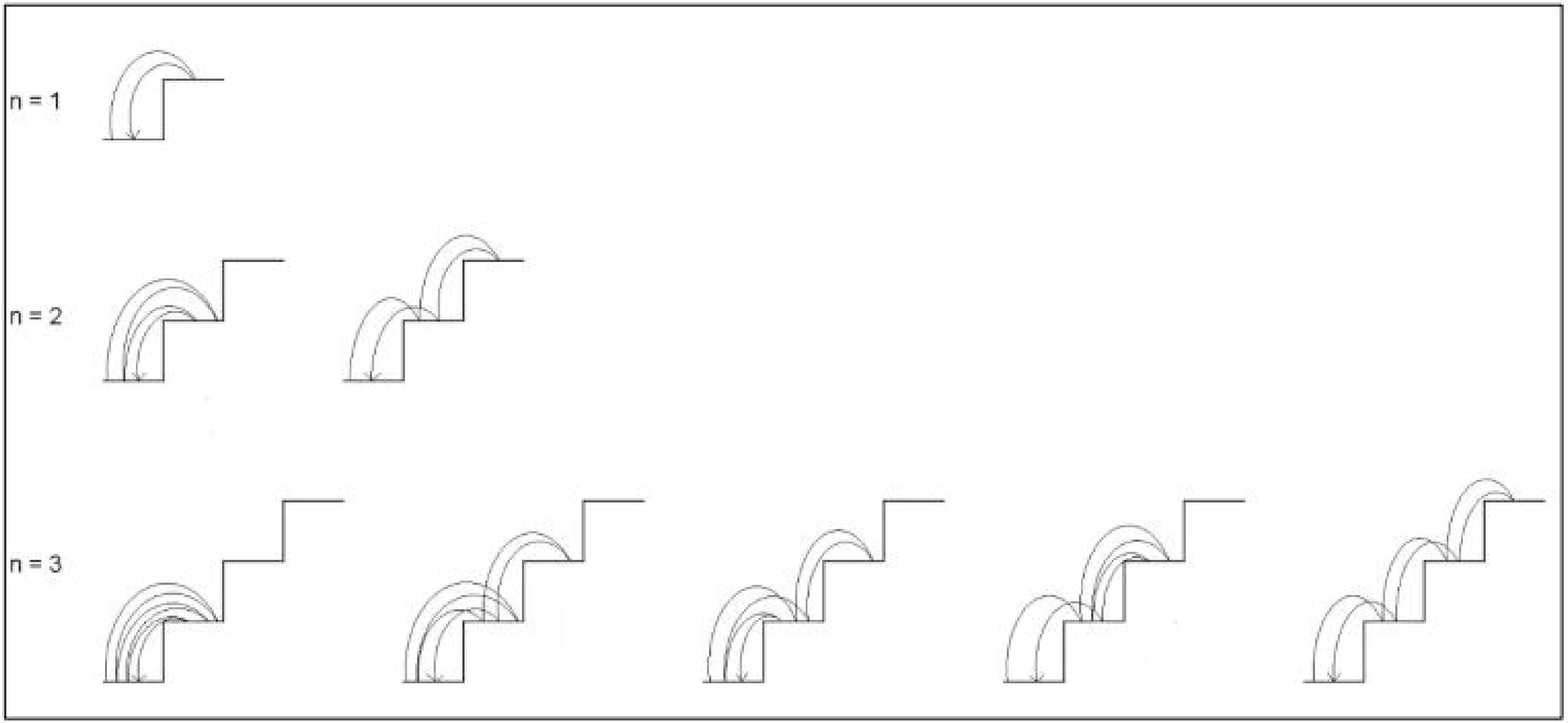
Kombinatorična igra Catalanovih števil



Kombinatorična igra Catalanovih števil

V raziskovalni nalogi sva predstavili osnove Catalanovih števil: nekaj znanih temeljnih primerov, formule in principe dokazovanja. Glavni cilj naloge pa je bil poiskati še nove[2] primere množic, katerih moči so Catalanova števila.

https://sgv.si/wp-content/uploads/legacy/2018/06/Kombinatori%C4%8Dna-igra-Catalanovih-%C5%A1tevil.pdf


n = 1
n = 2
n = 3

SPLOŠNI KRITERIJ DELJIVOSTI

1.2.1 Cilj raziskovalne naloge

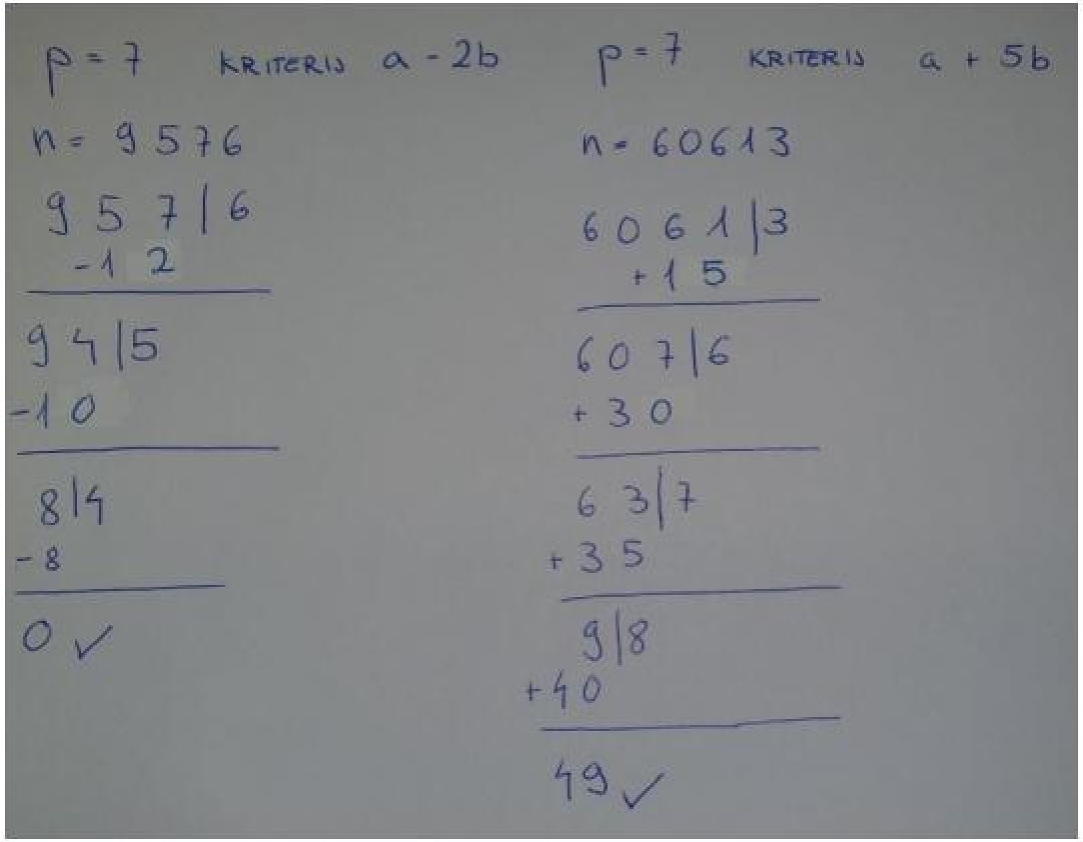
Cilj raziskovalne naloge je opisati algoritem, s katerim bomo za vsak naravni delitelj $\boldsymbol{p}$ poiskali število $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{Z}$ tako, da bo za vsako naravno število $\boldsymbol{n}$ izpolnjena enakost

$$\boldsymbol{n = 10a + b = p \cdot k + q(a - \lambda b), k} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}.$$

Če sta $\boldsymbol{p}$ in $\boldsymbol{q}$ tuji si števili, potem sklepamo, da je število $\boldsymbol{n = 10a + b}$ deljivo s številom $\boldsymbol{p}$ natanko takrat, ko je s številom $\boldsymbol{p}$ deljivo število $\boldsymbol{a - \lambda b}$.

Temu iterativnemu postopku bomo rekli **splošni kriterij deljivosti** $\boldsymbol{a - \lambda b}$.

https://sgv.si/wp-content/uploads/legacy/2020/09/Splosni-kriterij-deljivosti-JurijGrohar-MatejKompara.pdf


p = 7 KRITERIJ a - 2b
n = 9576
957|6
-12
94|5
-10
8|4
-8
0
p = 7 KRITERIJ a + 5b
n = 60613
6061|3
+15
607|6
+30
63|7
+35
9|8
+40
49

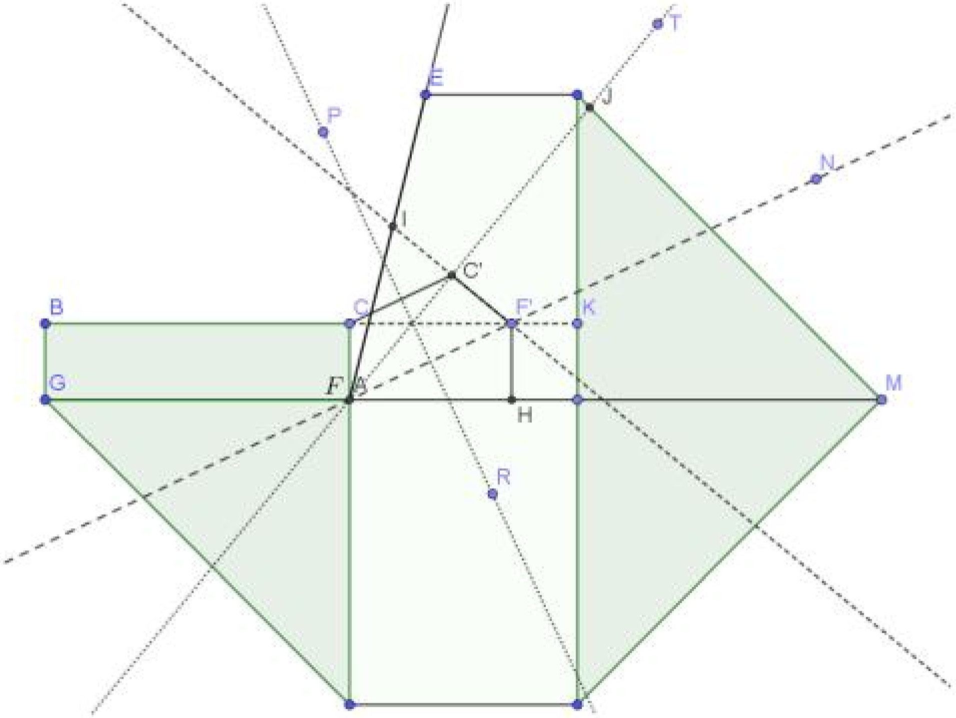
ORIGAMIKA
Delitev kota na več enakih delov

V nalogi smo si zastavili tri cilje:

- Prvi cilj: Opisati znane konstrukcije delitve kota na tri enake dele.
- Drugi cilj: Odkriti nove načine delitve kota na tri enake dele.
- Tretji cilj: Opisati Langovo konstrukcijo delitve kota na pet enakih delov.
- Četrti cilj: Proučiti delitev kota na sedem enakih delov.

https://zbirke.zotks.si/2022/resources/SS_matem_1068.pdf

Izrek 8: Origami konstrukcija z dvojnim pregibom, ki je opisana v postopku 8, razdeli kot na tri enake dele.[2]



Slika 9: K dokazu trisekcije, prilagojene Langovi quintisekciji

Reševanje polinomskih enačb z geometrijo

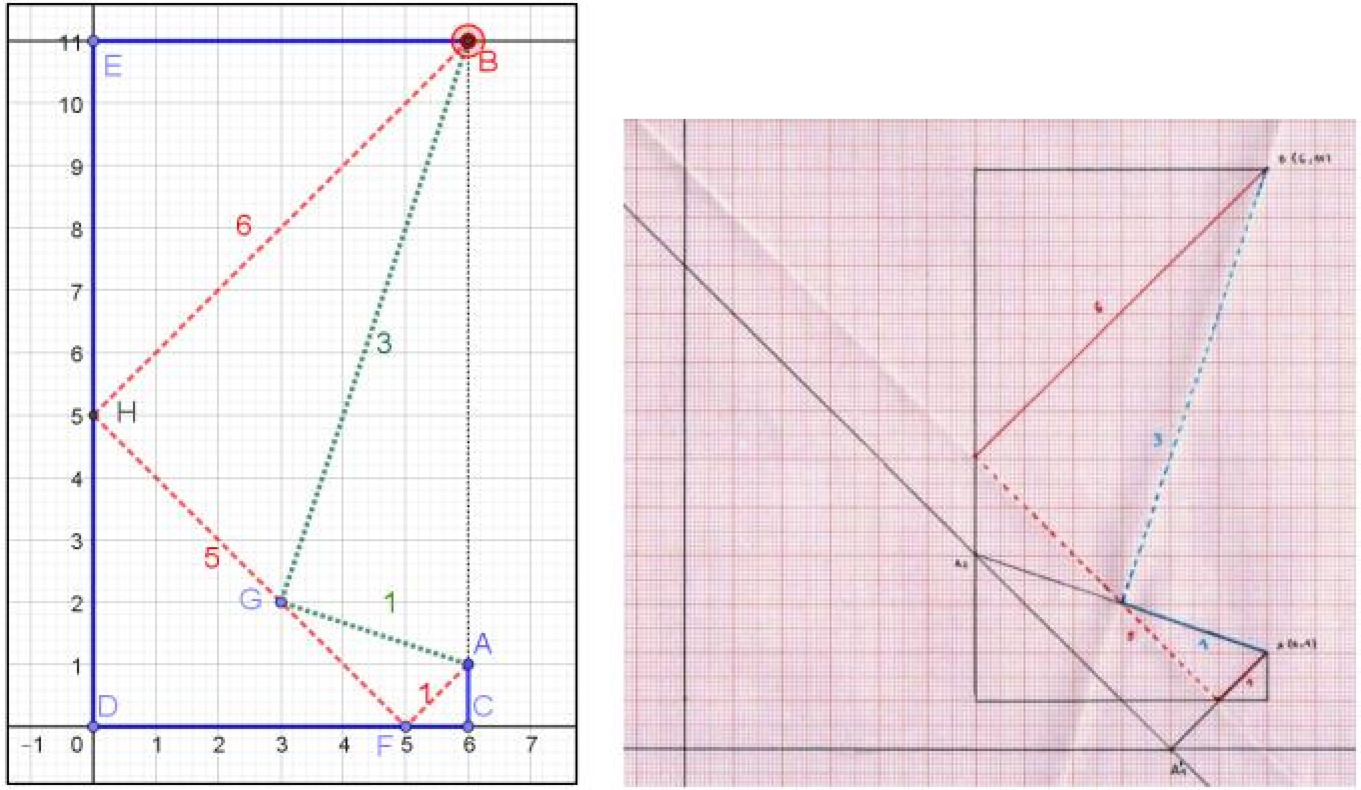
V nalogi smo si zastavili tri cilje:

- Prvi cilj: Preučiti, kako z želvjo grafiko rešimo polinomsko enačbo poljubne stopnje.
- Drugi cilj: Preučiti, kako s prepogibanjem papirja rešimo kvadratne in kubične enačbe.
- Tretji cilj: Rešiti starogrški problem podvojitve kocke

https://zbirke.zotks.si/2023/resources/SS_matem_2965.pdf

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 1)(x + 2)(x + 3).$$

Isto situacijo smo prikazali tudi s prepogibanjem papirja (Slika 27, desna stran).



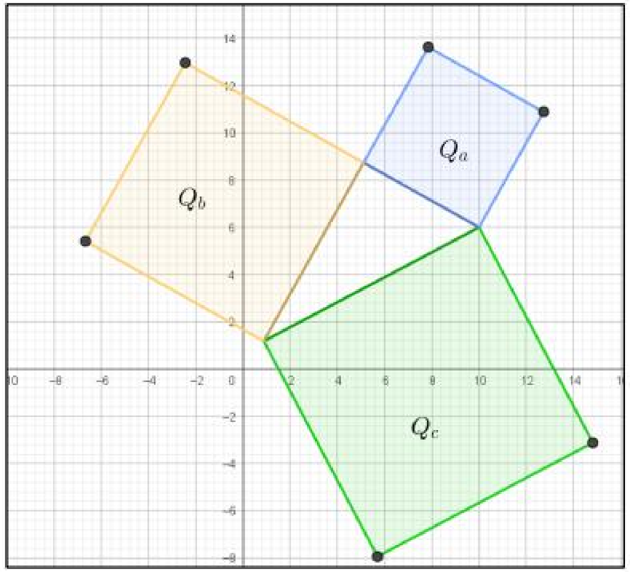
Slika 27:Razstavljanje polinoma (foto: Ema Ptičak)

Razreševanje trikotnika brez uporabe kotnih funkcij

V nalogi smo si zastavili tri cilje:

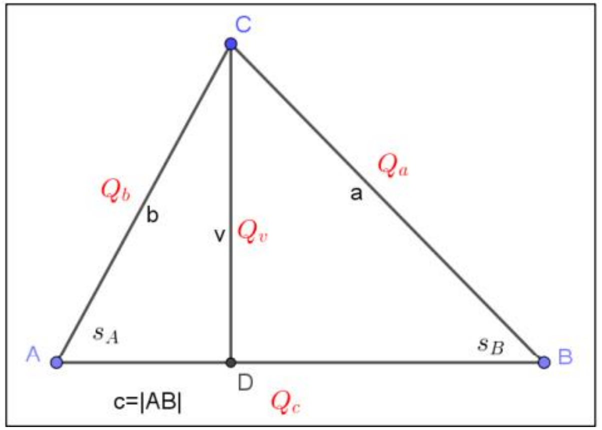
1. cilj: Preučiti koncept razreševanja trikotnikov brez uporabe običajnih kotnih funkcij. Koncept se imenuje *pristop racionalne trigonometrije.*
2. cilj: Dokazati, da s konceptom racionalne trigonometrije lahko razrešimo trikotnik.
3. cilj: Narediti primerjavo razreševanja trikotnika po obeh konceptih.

https://sgv.si/wp-content/uploads/2024/07/Razresevanje-trikotnika-brez-uporabe-kotnih-funkcij-1.pdf



Trditev 2: Trikotnik $\overline{ABC}$ je pravokoten (s pravim kotom pri oglišču C) natanko takrat, ko je

$$\boldsymbol{Q_a + Q_b = Q_c} \qquad (1$$



stežajni izrek $\dfrac{s_A}{Q_a} = \dfrac{s_B}{Q_b} = \dfrac{s_C}{Q_c}$

$$(Q_b + Q_c - Q_a)^2 = 4Q_bQ_cc_A$$

$$(Q_a + Q_c - Q_b)^2 = 4Q_aQ_cc_B$$

$$(Q_a + Q_b - Q_c)^2 = 4Q_aQ_bc_C$$

$$\boldsymbol{(s_A + s_B - s_C)^2 = 4s_As_B(1 - s_C)}$$

Teme nalog v OŠ:

- Skrivnost babilonske ploščice Plimpton 322
- Ploščina tetivnega petkotnika
- Krivulja, ki opisuje jajce
- Natančna konstrukcija pravilnega sedemkotnika

HVALA ZA VAŠO POZORNOST