Modeliranje s funkcijami in odvodom

Število bakterij

Opazujemo št. bakterij v tekočem gojišču. Vemo, da če je gojišče nasičeno z bakterijami, bo v njemu približno 10^{10} bakterij. Na začetku damo v gojišče 1 bakterijo, ki se začne razmnoževati.

a) Najprej predpostavimo, da se števijo bakterij podvoji približno vsake pol ure. Po koliko časa lahko v tem modelu pričakujemo 10^{10} bakterij? Ali je model realističen? Utemelji.

b) Popravimo zgornji model tako, da definiramo funkcijo $f(t) = \frac{10^{10}t+400}{(t+20)^2}$, ki predstavlja število bakterij v tekočem gojišču ob času t ur. Koliko bakterij je pri tem modelu v gojišču na začetku?

c) Koliko bakterij je v gojišču po enem letu?

d) Kdaj je največ bakterij in koliko (namig: v števcu odvoda izpostavi $(t + 20)$)?

e) Koliko bakterij je v gojišču na koncu (po dovolj veliko letih)?

f) Skiciraj graf funkcije f.

g) Kaj je pomen odvoda $f'(t)$? Opiši, kako bi izračunali kdaj število bakterij najhitreje narašča.

Spreminjanje temperature

Opazujemo temperaturo v stopinjah Celzija v središču gorenja. Odločimo se, da jo bomo modelirali s funkcijo $T(t) = \frac{1000t}{(t-3)^2+2} + 20$, ki predstavlja temperaturo ob času t ur. Opomba: za funkcijo, ki temelji na poskusih, uporabi Google ali vprašaj fizika ali kemika.

a) Skiciraj graf funkcije T. Namig: odvajaj preden daš na skupni imelovalec.

b) Izračunaj začetno temperaturo, največjo temperaturo in končno temperaturo. Kolikšna je temperatura okolice?

Rešitve:

Število bakterij: a)16,6 h, model ni realističen, ker število bakterij narašča v neskončnost. b) $f(0) = 1$, c) $f(24 \cdot 365) = 1,14 \cdot 10^6$, kar je precej nerealno. Najbrž po enem letu v gojišču več ne bi bilo bakterij ali bi jih bilo le še zelo malo. d) Ničla odvoda je približno pri $t = 20$ h, kjer je tudi maksimum. Takrat je na gojišču približno $f(20) = 1,25 \cdot 10^8$ bakterij. Torej je naš model bistveno drugačen kot pri delu a), kjer smo predpostavili, da se bakterije neovirano podvojijo vsake pol ure. Prav tako je maksimalno število bakterij približno 100 krat manjše od 10^{10}, kolikor bi jih naj bilo v gojišču, če bi le-to bilo nasičeno. e) $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$, torej na koncu v gojišču ni več bakterij. f) Pravilnost grafa preveri z Geogebro. g) $f'(t)$ predstavlja kako hitro število bakterij narašča. Najhitreje narašča takrat, ko je maksimum $f'(t)$. Ta maksimum bi lahko izračunali s pomočjo drugega odvoda (ničle drugega odvoda so stacionarne točke prvega odvoda).

Spreminjanje temperature: a) Preveri z Geogebro, b) $T(0) = 20$ stopinj. Največja temperatura je pri maksimumu funkcije T, ki je pri $t = 3,32$ h in sicer približno $T(3,32) = 1600$ stopinj. Končna temperatura je $\lim_{t\to\infty} T(t) = 20$ stopinj, kar je posledično tudi temperatura okolice.